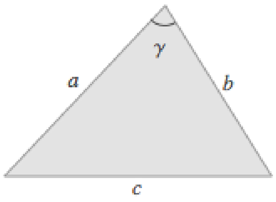
TP537 – Transmissão Digital
2ª Avaliação – 30/06/2018 – 08:00h
Prof. Dayan Adionel Guimarães

Nota:

Aluno(a): ____

Prova com consulta apenas ao livro texto, com duração de **3h**. A interpretação é parte integrante das questões. É proibido uso de calculadora programável. Seja organizado. Boa prova!

DADOS



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

$$P_b \approx \frac{P_e}{M \log_2 M} \sum_{i=1}^{M} \text{número médio de bits em erro} \mid \mathbf{s}_i$$, para altos valores de E_b/N_0.

1ª questão (15 pontos)

Determine os possíveis valores de I e Q para que um sinal QPSK com símbolos de energia 0,002 joule e taxa de 1000 bit/s possa ser gerado com o um modulador I&Q, admitindo que a portadora de entrada desse modulador tenha amplitude de pico unitária.

Solução

$$\underset{i=1,2,3,4}{s_i(t)} = \sqrt{E}\cos\left[(2i-1)\frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_c t) - \sqrt{E}\text{sen}\left[(2i-1)\frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\frac{2}{T}}\text{sen}(2\pi f_c t).$$

Dessa expressão se pode obter

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix}\sqrt{\frac{E}{2}}\\ -\sqrt{\frac{E}{2}}\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{E}{2}}\\ -\sqrt{\frac{E}{2}}\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{E}{2}}\\ \sqrt{\frac{E}{2}}\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \begin{bmatrix}\sqrt{\frac{E}{2}}\\ \sqrt{\frac{E}{2}}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix}\sqrt{0,001}\\ -\sqrt{0,001}\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix}-\sqrt{0,001}\\ -\sqrt{0,001}\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix}-\sqrt{0,001}\\ \sqrt{0,001}\end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_4 = \begin{bmatrix}\sqrt{0,001}\\ \sqrt{0,001}\end{bmatrix}.$$

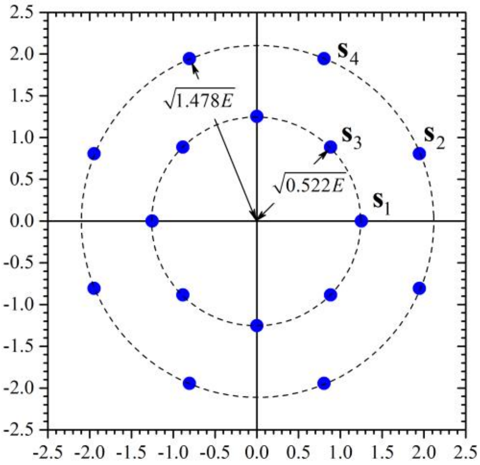
$$s_i(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t) = s_{i1}\sqrt{\tfrac{2}{T}}\cos(2\pi f_c t) + s_{i2}\sqrt{\tfrac{2}{T}}\text{sen}(2\pi f_c t) = I\cos(2\pi f_c t) + Q\text{sen}(2\pi f_c t).$$

Como R_b = 1000 bit/s, R = 500 símbolos/s e T = 1/500 = 0,002 s $\Rightarrow s_{ij}\sqrt{\tfrac{2}{T}} = \pm\sqrt{0,001}\sqrt{\tfrac{2}{0,002}} = \pm 1$. Então,

$$\begin{bmatrix}I_1\\ Q_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}I_2\\ Q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}I_3\\ Q_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}I_4\\ Q_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

2ª questão (10+10+7 pontos)

A figura a seguir mostra a constelação de uma modulação chamada 2r16APK (*two-radii 16-ary amplitude-phase keying*), cujo nome se deve ao fato de ser uma modulação que combina chaveamento de fase e de amplitude, com constelação tendo os símbolos dispostos sobre duas circunferências de raios diferentes. As denominações dos primeiros 4 símbolos estão mostradas na constelação dada; as demais denominações seguem a sequência. Nos itens a seguir, considere que os símbolos são equiprováveis.



a) Determine a expressão de cálculo da probabilidade de erro de símbolo em função de E_b/N_0, utilizando o limitante de união. Considere que a razão E_b/N_0 é alta e que, na constelação, todos os símbolos vizinhos mais próximos estão aproximadamente à mesma distância $d_{\min} = d_{13}$ um do outro.

Solução

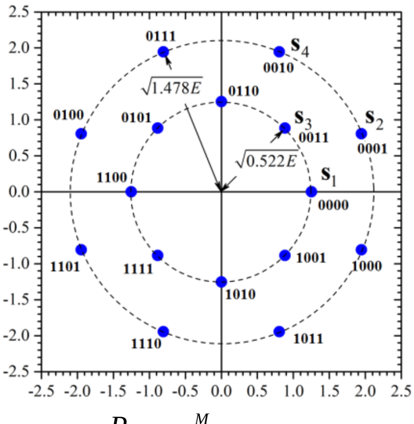
$$d_{\min}^2 = 2\times 0{,}522E - 2\times 0{,}522E\times\cos(\pi/4) \Rightarrow d_{\min} \approx \sqrt{0{,}306E} = \sqrt{1{,}224E_b}$$

Cada um dos 8 símbolos externos tem 2 vizinhos distantes de $d_{\min}$ e cada um dos 8 símbolos internos tem 4 vizinhos distantes de $d_{\min}$. Então, teremos

$$P_e \approx \frac{1}{2\times 16}\left[8\times 2\times \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{1{,}224E_b}}{2\sqrt{N_0}}\right) + 8\times 4\times \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{1{,}224E_b}}{2\sqrt{N_0}}\right)\right] = \frac{3}{2}\operatorname{erfc}\left(0{,}553\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

b) Determine a expressão de cálculo da probabilidade de erro de bit em função da probabilidade de erro de símbolo. Use a sequência crescente do código Gray como mapeamento símbolo-bit, começando no símbolo $\mathbf{s}_1$ com a primeira palavra binária e seguindo no sentido anti-horário.

Solução



$$P_b = \frac{P_e}{M\log_2 M}\sum_{i=1}^{M} \text{número médio de bits em erro} \mid \mathbf{s}_i$$

$$= \frac{P_e}{64}\left(\frac{6}{4}+\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{2}{2}\right) = \frac{5P_e}{16}$$

c) Usando as expressões encontradas nos itens anteriores, calcule a probabilidade de erro de bit para E_b/N_0 = 13,93 dB.

Solução

$P_e \approx \frac{3}{2}\text{erfc}\left(0{,}553\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \approx \frac{3}{2}\text{erfc}(2{,}75) \approx 1{,}515\times10^{-4}$. Então, $P_b = \frac{5P_e}{16} \approx 4{,}73\times10^{-5}$.

3ª questão (15+10 pontos)

Existe um limitante de união também para a probabilidade de erro de bit, o qual é calculado por

$$P_\text{b} \le \frac{1}{2M\log_2 M}\sum_{i=1}^{M}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{M} d_{i,k}^H \text{erfc}\left(\frac{d_{i,k}^E}{2\sqrt{N_0}}\right),$$

em que $d_{i,k}^E$ é a distância Euclidiana entre $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{s}_k$, e $d_{i,k}^H$ é a distância de Hamming (número de bits diferentes) entre as palavras binárias que mapeiam $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{s}_k$.

a) Considerando a constelação da 1ª questão, determine a expressão de cálculo da probabilidade de erro de bit utilizando esse limitante, admitindo que a razão sinal-ruído seja alta.

Solução

Sendo alta a razão sinal-ruído, haverá erros predominantemente para símbolos vizinhos mais próximos, cuja distância Euclidiana é $d_\text{min} \approx \sqrt{1{,}224E_b}$ (da questão 2, item "a"). Dos 16 símbolos, os 8 internos tem 4 vizinhos cuja soma de distâncias de Hamming é 6, e os 8 externos tem 2 vizinhos cuja soma de distâncias de Hamming é 2. Assim, teremos

$$P_\text{b} \approx \frac{1}{128}[8\times6+8\times2]\text{erfc}\left(\frac{\sqrt{1{,}224E_b}}{2\sqrt{N_0}}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(0{,}553\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

b) Calcule a probabilidade de erro de bit para E_b/N_0 = 13,93 dB. Compare o resultado com aquele encontrado no item "c" da questão 2.

Solução

$P_\text{b} \approx \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{0{,}306\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{0{,}306\times10^{1{,}393}}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}(2{,}75) \approx 5\times10^{-5}$, valor este muito próximo daquele encontrado no item "c" da questão 2.

4ª questão (15 pontos)

Em estatística, a **distribuição triangular** é tipicamente usada para a descrição de uma variável aleatória para a qual há dados limitados. Baseia-se no conhecimento do mínimo e máximo e um "palpite" quanto ao valor mais provável (moda) da variável que se quer descrever. Por estas razões, a distribuição triangular tem sido chamada de distribuição *lack of knowledge* (falta de conhecimento). Sua função densidade de probabilidade é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \le x \le c \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c < x \le b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere um sistema de sensoriamento espectral cooperativo com fusão de dados, cuja estatística de teste X gerada no centro de fusão tem distribuição triangular com parâmetros: valor mínimo $a = -3$, moda $c = 1$ e valor máximo $b = 2$ sob a hipótese H_0 ; valor mínimo $a = 0$, moda c desconhecida e valor máximo $b = 7$ sob a hipótese H_1. Calcule o limiar de decisão de forma que a probabilidade de falso alarme seja 0,1. Em seguida, calcule a relação sinal-ruído (RSR) na entrada do receptor do centro de fusão para que se alcance uma probabilidade de detecção de 0,9, sabendo que se pode calcular potência como aproximadamente c^2. Desenhe as densidades da estatística de teste X condicionadas a H_0 e H_1.

Solução

Deve-se encontrar o limiar de decisão λ tal que a área da densidade sob H_0 à direita de λ seja 0,1. Em seguida deve-se encontrar a moda c da densidade sob H_1 tal que a área dessa densidade à direita de λ seja 0,9. Como a potência do ruído é $c^2 = 1$ sob H_0, a RSR será c^2 sob H_1.

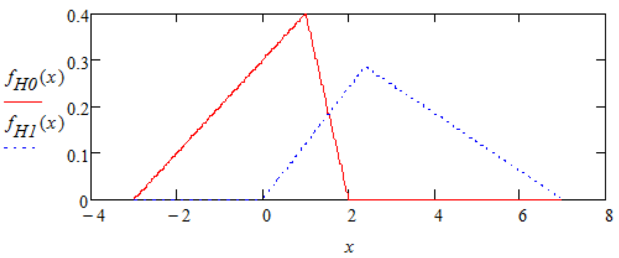
$x := -3, -2.99 .. 7$

$a := -3 \qquad c := 1 \qquad b := 2$

$$f_{H0}(x) := \begin{cases} \dfrac{2\cdot(x-a)}{(b-a)\cdot(c-a)} & \text{if } (a \le x \le c) \\ \dfrac{2\cdot(b-x)}{(b-a)\cdot(b-c)} & \text{if } (c < x \le b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$a := 0 \qquad c := 2.38 \qquad b := 7$

$$f_{H1}(x) := \begin{cases} \dfrac{2\cdot(x-a)}{(b-a)\cdot(c-a)} & \text{if } (a \le x \le c) \\ \dfrac{2\cdot(b-x)}{(b-a)\cdot(b-c)} & \text{if } (c < x \le b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Given

$\lambda := 1$

$$\int_{\lambda}^{\infty} f_{H0}(x)\,dx = 0.1$$

$\lambda := \text{Find}(\lambda) = 1.293$

$$P_{fa} := \int_{\lambda}^{\infty} f_{H0}(x)\,dx = 0.1 \qquad P_d := \int_{\lambda}^{\infty} f_{H1}(x)\,dx = 0.9 \qquad c^2 = 5.664$$

5ª questão para casa (18 pontos)

Recalcule os coeficientes do equalizador ZF do Exemplo 4.7 (p. 346 do livro texto), utilizando o fator de forma α = ______________ na expressão (4.140). Essa expressão corresponde a um pulso do tipo cosseno elevado alargado no tempo. O valor de α será informado pelo professor, um para cada aluno. Enviar a solução por e-mail (para dayan@inatel.br) até às 12:00h do dia 01/07/2018.