

Estimação Empírica da Distribuição da Estatística de Teste para o Sensoriamento Espectral por Máximo Autovalor sob a Hipótese H_1

João S. Neto, Dayan A. Guimarães e Rausley A. A. de Souza

Resumo—Neste artigo é mostrado que a distribuição Log-Pearson 3P é uma boa aproximação para a função densidade de probabilidade da estatística de teste para detecção por máximo autovalor (MED) no sensoriamento espectral cooperativo em aplicações de rádio cognitivo, sob a hipótese de que o sinal transmitido pela rede primária está presente. Este resultado complementa os já existentes na literatura que consideram a hipótese de que o sinal transmitido não está presente. Em conjunto, estes resultados são úteis para a concepção e avaliação de desempenho da técnica MED em termos das probabilidades de falso alarme e de detecção.

Palavras-Chave—Detecção por máximo autovalor, rádio cognitivo, sensoriamento espectral por autovalores.

Abstract— In this paper it is showed that the Log-Pearson 3P is a good approximation of the probability density function of the maximum eigenvalue detection (MED) test statistic for cooperative spectrum sensing in cognitive radio applications, under the hypothesis that the primary transmitted signal is present. This result complements those already available in the literature, which consider the hypothesis that the transmitted signal is not present. Jointly, these results are useful for the design and performance assessment of the MED technique in terms of the false alarm and detection probabilities.

Keywords— Cognitive radio, eigenvalue-based spectrum sensing, maximum eigenvalue detection.

I. INTRODUÇÃO

A política de alocação espectral vigente é conhecida como política de alocação fixa. Para cada sistema de comunicação sem fio é destinada uma banda de frequências e sua utilização normalmente é vinculada ao pagamento de uma licença de uso. Porém, como o espectro é limitado, observa-se que em determinadas faixas não há mais espaço para alocar novos serviços. Tal fato serviu de motivação para pesquisas que concluíram que grande parte das faixas de frequência já alocadas encontra-se subutilizada [1, 2].

Neste contexto surge então o conceito de Rádio Cognitivo (RC) [3], uma revolucionária tecnologia que tem potencial para ser o novo paradigma em comunicações sem fio. Através do sensoriamento espectral, tarefa fundamental a ser desempenhada por um RC, é possível detectar partes do espectro de frequências alocadas aos chamados usuários primários ou licenciados e que estejam temporariamente fora de uso, permitindo assim o acesso oportunista por parte dos usuários secundários ou não licenciados (os RCs).

O sensoriamento espectral pode ser realizado de forma independente por cada rádio cognitivo ou pode ser realizado de maneira cooperativa, sendo que esta última tem potencial para operar de forma mais eficaz e é a que tem sido mais explorada nas pesquisas recentes.

Pouco mais de dez anos se passaram desde que o conceito de Rádio Cognitivo foi proposto. Várias técnicas de sensoriamento espectral foram propostas, dentre elas podendo ser citadas a detecção por filtro casado, a detecção por atributos ou propriedades ciclo-estacionárias do sinal e a detecção de energia [4, 5]. Entre as técnicas de detecção mais recentes e promissoras estão aquelas baseadas nos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido [6-8]. Merece destaque especial a técnica MED cooperativa, também conhecida como teste de Roy de máxima raiz (RLRT, *Roy's Largest Root Test*) [7] ou como detecção de energia com combinação cega (BCED, *Blindly Combined Energy Detection*) [8], a qual apresenta o melhor desempenho sob o modelo de sistema aqui adotado [7].

A. Trabalhos Relacionados

Duas figuras de mérito associadas ao desempenho do sensoriamento espectral são a probabilidade de falso alarme, P_{FA} , e a probabilidade de detecção P_D . A probabilidade de falso alarme representa a probabilidade de se decidir que o sinal primário está presente na banda de frequências sensorizada, sendo que de fato ele não está presente. A probabilidade de detecção representa a probabilidade de se decidir que o sinal primário está presente, sendo que ele realmente está presente na banda sensorizada.

Para a técnica MED cooperativa, a determinação de P_{FA} e P_D de forma analítica passa pelo conhecimento da função densidade de probabilidade (fdp) da estatística de teste, que é o máximo autovalor da matriz de covariância. Sob a hipótese H_0 , ou seja, considerando que o sinal primário não está presente na banda de frequências a ser sensorizada, a matriz de covariância do sinal recebido é uma matriz Wishart [9], podendo-se a partir dela encontrar a fdp da estatística de teste e, a partir desta, a P_{FA} [8]. Sob a hipótese H_1 , ou seja, considerando que o sinal primário está presente, ainda não há solução exata para a distribuição dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido, sob o modelo aqui considerado, representando este um importante desafio para novas pesquisas. O modelo a que se refere este trabalho considera que os sinais transmitidos pela rede primária, antes de chegarem aos RCs, passam por um canal com desvanecimento Rayleigh plano e com ruído

AWGN (*additive white Gaussian noise*). Este modelo melhor se adequa a um cenário real, se comparado com aqueles que consideram apenas o efeito do ruído AWGN, os quais são comumente adotados na análise da distribuição de autovalores da matriz de covariância do sinal recebido. Além disso, a maior parte das análises é assintótica. Nela, o número de linhas (número de RCs sob cooperação) e de colunas (número de amostras colhidas por cada RC) da matriz de covariância tendem a infinito, mantendo-se constante a relação entre eles. Apenas mais recentemente começaram a ser publicados resultados obtidos a partir de análises não assintóticas, considerando números realistas de RCs e amostras. Claramente a análise assintótica resulta em uma manipulação matemática facilitada se comparada à análise não assintótica. A publicação mais recente sobre o assunto conhecida pelos autores apresenta de maneira unificada os mais importantes resultados já obtidos no que diz respeito à análise teórica das distribuições de autovalores ou de estatísticas de teste baseadas em autovalores, tanto do ponto de vista assintótico quanto não assintótico [10]. Entretanto, tal publicação não contempla o modelo adotado neste artigo. Em [11, Cap. 1] adota-se um modelo similar àquele aqui considerado e uma análise não assintótica do máximo autovalor da matriz de covariância tanto sob a hipótese H_0 quanto sob a hipótese H_1 . Entretanto, como os próprios autores lá afirmam, o uso das correspondentes distribuições de probabilidade é bastante complexo em termos computacionais, posto que envolve determinantes de matrizes cujos elementos são funções especiais, [11, eqs. (5) e (8)]. Em [8] a elevada complexidade computacional é atribuída ao cálculo de valores da função hipergeométrica com argumento matricial.

B. Contribuições e Estrutura do Artigo

Este trabalho propõe contribuir em parte com a solução dos problemas supramencionados, através de uma análise empírica em que a fdp da estatística de teste sob a hipótese H_1 na técnica MED é determinada, permitindo que se obtenha uma expressão fechada simples para o cálculo da P_D .

O restante do artigo está organizado da seguinte maneira: a Seção II apresenta o princípio de operação da técnica MED cooperativa. Na Seção III é abordado o método empírico utilizado na estimação da fdp do máximo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido sob a hipótese H_1 . A Seção IV traz resultados de simulação. A conclusão do trabalho está presente na Seção V.

II. A TÉCNICA MED COOPERATIVA

No sensoriamento cooperativo centralizado, dados coletados por cada RC em cooperação (por exemplo, amostras de sinal recebido) são enviados a um centro de fusão (CF) por meio de um canal de controle. A este processo dá-se o nome de fusão de dados (*data-fusion*). Depois de processar os dados recebidos dos RCs, o CF decide sobre o estado de ocupação do canal sensoriado. O sensoriamento cooperativo centralizado também pode ser executado a partir de decisões sobre o estado de ocupação do canal monitorado, tomadas por todos os RCs em cooperação. Neste caso tem-se o que é denominado fusão de decisões (*decision-fusion*), onde as decisões tomadas pelos RCs são combinadas no CF através de operações aritméticas binárias antes que a decisão final seja tomada. Em ambos os esquemas centralizados a decisão final é informada aos RCs via canal de controle, seguindo-se o algoritmo de acesso adotado pela rede secundária. Neste artigo considera-se o sensoriamento cooperativo centralizado do tipo fusão de dados,

para o qual comumente adota-se o modelo de canal MIMO (*multiple input, multiple output*) discreto no tempo e sem memória. Em uma de suas variantes admite-se que haja m antenas em um RC ou m RCs com antenas simples, cada um coletando n amostras dos sinais recebidos de p transmissores primários durante um período de sensoriamento. Tais amostras são arranjadas em uma matriz $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. De forma análoga, as amostras referentes ao sinal transmitido pelos p transmissores primários são arranjadas em uma matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{p \times n}$. Seja $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times p}$ a matriz de canal com elementos $\{h_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, p$, os quais representam o ganho do canal entre o j -ésimo transmissor primário e o i -ésimo sensor (elemento em um arranjo de antenas ou receptor com antena simples). Finalmente, seja $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ a matriz que contém as amostras de ruído térmico que contaminam o sinal recebido pelos m sensores. A matriz de amostras do sinal recebido é então dada por $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V}$.

No sensoriamento cooperativo baseado em autovalores, as lacunas espectrais são detectadas por meio de um teste de hipóteses baseado nos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido, a qual tem sua estimação de máxima verossimilhança dada pela média amostral $\mathbf{R} = (\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger)/n$, onde \dagger significa conjugado transposto. O máximo autovalor de \mathbf{R} , λ_{\max} , é então computado e a estatística de teste MED é calculada através de [7]

$$T = \frac{\lambda_{\max}}{\sigma^2}, \quad (1)$$

onde σ^2 é a potência média do ruído térmico na entrada de cada RC, a qual admite-se ser conhecida *a priori* ou estimada. A partir de (1) utiliza-se o seguinte algoritmo de detecção: se $T > \gamma$, considera-se que o sinal primário está presente na banda de frequências sensoriada; caso contrário considera-se que o sinal primário não está presente, onde γ representa o limiar de decisão utilizado pelo centro de fusão. Logo a probabilidade de detecção de tal algoritmo é definida por

$$P_D = \Pr[T > \gamma | H_1] = \int_{\gamma}^{\infty} f_T(t) dt, \quad (2)$$

onde $f_T(t)$ representa a função densidade de probabilidade da variável de decisão T sob a hipótese H_1 .

III. ESTIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DA ESTATÍSTICA DE TESTE

A proposta desta seção é determinar a distribuição $f_T(t)$ através de uma análise empírica fundamentada no teste de aderência (*goodness-of-fit*) de Kolmogorov-Smirnov [12], para posteriormente aplicá-la na determinação de uma expressão para o cálculo de P_D em função do limiar de decisão γ .

A. O Teste de Kolmogorov-Smirnov

Com base em um conjunto de dados provenientes da observação da variável aleatória de decisão T é possível selecionar distribuições de probabilidade teóricas que a represente. A fim de se realizar esta seleção pode-se utilizar, dentre outros, o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov [12]. Seja $F(t)$ a distribuição de probabilidade cumulativa teórica assumida para os dados estudados e $F_N(t)$ a distribuição de probabilidade cumulativa empírica definida como

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (I(t_i) \leq t), \quad (3)$$

onde t_i representa a observação i , $i = 1, 2, \dots, N$, da variável aleatória T em questão e a função indicadora $I(t_i)$ vale 1 se $t_i \leq t$ e 0 caso contrário. Define-se a variável D do teste de Kolmogorov-Smirnov como a máxima distância vertical entre as funções teórica $F(t)$ e empírica $F_N(t)$ nos pontos t_i e t_{i-1} :

$$D = \max_{1 \leq i \leq N} [F(t_i) - F_N(t_{i-1}), F_N(t_i) - F(t_i)]. \quad (4)$$

A partir de uma análise de D têm-se duas hipóteses: 1) a distribuição selecionada representa os dados de forma adequada, denominada de hipótese H_A , 2) a distribuição selecionada não representa os dados de forma adequada, denominada de hipótese H_B . Quando $N > 40$, caso considerado neste trabalho, a hipótese H_A será rejeitada se D for maior que o valor crítico apresentado na Tabela I para diferentes níveis de significância α . Para valores de $N \leq 40$ o princípio é o mesmo, porém os valores críticos podem ser obtidos através da tabela disponível em [16]. Um nível de significância α menor corresponde a uma chance maior de a distribuição empírica apresentar um valor crítico maior, ou seja, de estar menos aderente à distribuição teórica sob análise. Assim, quanto maior o nível de significância, mais severo é o teste de aderência. Caso D seja menor que o valor crítico considerado, conclui-se que os dados analisados seguem a distribuição estipulada com $(1-\alpha) \times 100\%$ de confiança.

TABELA I. VALORES CRÍTICOS PARA O TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV.

α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Valor Crítico	$\frac{1,07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,52}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{N}}$

B. Base de Dados

Para obter uma amostra de tamanho N da variável de decisão T , utilizou-se o programa em *Mathcad* presente no Apêndice. Seu princípio de funcionamento consiste em gerar as matrizes \mathbf{X} , \mathbf{V} e \mathbf{H} segundo modelo apresentado na Seção II, calcular $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V}$, determinar a matriz de covariância $\mathbf{R} = (\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T)/n$, extrair seu máximo autovalor e por fim computar a estatística de teste T como definida em (1). Assim, ao final de N iterações se obtém a amostra desejada.

Para geração das matrizes \mathbf{X} , \mathbf{V} e \mathbf{H} foram considerados 36 conjuntos de valores para os parâmetros m (número de RCs), n (número de amostras colhidas por cada RC) e SNR (relação sinal-ruído SNR), considerando um transmissor primário ($p = 1$). Com estes valores foram obtidas 36 amostras de tamanho $N = 5.000$ da variável de decisão T .

C. Análise e Determinação da Distribuição de T sob H_1

Para se determinar empiricamente a distribuição de probabilidade definida em (3) para cada amostra da variável de decisão e posteriormente atribuir a cada uma um conjunto de distribuições de probabilidade teóricas que as descrevem de maneira adequada, utilizou-se o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov implementado pelo programa EasyFit [14]. A Tabela II apresenta a classificação das 10 distribuições mais bem colocadas nos testes de aderência, bem como o número de vezes em que cada uma esteve presente entre as 12 primeiras colocadas nos 36 testes realizados. A distribuição Log-Pearson 3P [15] esteve entre as 12 primeiras colocadas em

36 dos 36 testes, sendo classificada em 12º lugar em apenas um deles e em 11º em 3 deles. Entretanto, mesmo estando em 11º ou 12º lugar, ela foi aceita no teste de aderência para o critério mais severo (maior nível de significância). Embora a distribuição Lognormal 3P tenha sido colocada entre as 12 primeiras com a mesma frequência de ocorrência que a Log-Pearson 3P, ela ficou em 8º e 9º lugares muitas vezes e, por esta razão, foi colocada na segunda classificação na Tabela II. Conclui-se, desta maneira, que tal distribuição representa uma boa estimativa para a distribuição da estatística de teste T sob a hipótese H_1 para os casos investigados.

TABELA II. FREQUÊNCIA DE OCORRÊNCIA DAS DISTRIBUIÇÕES.

Classificação	Distribuição	Frequência
1	Log-Pearson 3P	36
2	Lognormal 3P	36
3	Fatigue Life 3P	34
4	Gen. Gamma 4P	33
5	Gamma 3P	28
6	Gen. Extreme Value	28
7	Johnson SB	28
8	Pearson 5 3P	28
9	Wakeby	24
10	Pearson 6 4P	23

A função densidade de probabilidade da distribuição Log Pearson 3P é dada por

$$f_T(t) = \frac{1}{t|b|\Gamma(a)} \left(\frac{\ln(t)-c}{b} \right)^{a-1} \exp\left(-\frac{\ln(t)-c}{b} \right), \quad (5)$$

onde a , b e c são, respectivamente, os parâmetros de forma, escala e posição de tal distribuição e $\Gamma(x)$ é a função Gamma.

Na Tabela III estão listados os parâmetros m , n e SNR utilizados nos testes de aderência supramencionados e os correspondentes parâmetros a , b e c da distribuição Log-Pearson 3P obtidos pelo teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov realizado pelo EasyFit. De posse desta tabela pode-se efetuar o cálculo teórico da probabilidade de detecção P_D para quaisquer das combinações de parâmetros listadas.

Por fim, substituindo (5) em (2) tem-se a seguinte expressão fechada para P_D :

$$P_D = \frac{\Gamma\left(a, \frac{\ln(t)-c}{b}\right)}{\Gamma(a)}, \quad (6)$$

onde $\Gamma(x, y)$ é a função Gamma incompleta.

D. Resultados de Simulação

A Figura 1 mostra três funções densidade de probabilidade Log-Pearson 3P, obtidas por meio da eq. (5), para três dos conjuntos de parâmetros da Tabela III e as correspondentes densidades empíricas obtidas por simulação. Observa-se que há grande aderência, conforme comprovado pelo teste de Kolmogorov-Smirnov.

A Figura 2 traz a relação P_D versus γ para dois conjuntos de valores de m , n e SNR diferentes daqueles fornecidos na

Tabela III, a saber: $(SNR, m, n) = (0 \text{ dB}, 2, 4)$ e $(0 \text{ dB}, 2, 5)$. A razão para a escolha destes valores ficará clara logo adiante. As curvas tracejada e contínua representam cálculos teóricos realizados através da expressão (6) e os quadrados e círculos correspondem a resultados via simulação de Monte Carlo.

TABELA III. ALGUNS VALORES PARA m, n E SNR COM A RESPECTIVA RELAÇÃO COM OS PARÂMETROS a, b E c DA DISTRIBUIÇÃO LOG-PEARSON 3P.

SNR, dB	m	n	a	b	c
0	2	10	52,263	0,0686	-0,2517
0	2	50	57,185	0,0594	1,5188
0	2	100	59,769	0,0580	2,1419
0	5	10	432,55	0,0207	-4,8784
0	5	50	348,18	-0,0205	12,791
0	5	100	262,38	-0,0238	12,565
0	10	10	7924,4	-0,0044	39,268
0	10	50	191,49	-0,0226	10,602
0	10	100	101,31	-0,0304	10,044
-20	2	10	87,815	-0,0268	4,9408
-20	2	50	4511,4	0,0017	-3,6769
-20	2	100	993,69	-0,0027	7,3491
-20	5	10	5949,4	-0,0023	16,843
-20	5	50	372,06	0,0046	2,5766
-20	5	100	4874,2	0,0009	0,4167
-20	10	10	263490	-0,0003	73,323
-20	10	50	461,8	0,0034	2,9542
-20	10	100	141,76	0,0046	4,4151
-8	2	10	7892,8	-0,0031	27,259
-8	2	50	11,632	0,0536	3,6149
-8	2	100	6,8646	0,0634	4,4686
-8	5	10	69,61	0,0267	1,3691
-8	5	50	14,521	0,0491	3,872
-8	5	100	16,031	0,0471	4,4684
-8	10	10	22,638	0,0426	2,7073
-8	10	50	59,745	0,0253	3,447
-8	10	100	119,56	0,0178	3,4642
7	2	10	187,07	-0,0521	14,221
7	2	50	73,733	-0,0783	11,889
7	2	100	33,727	-0,1153	10,693
7	5	10	156,89	-0,0435	12,188
7	5	50	49,829	-0,0652	10,306
7	5	100	26,396	-0,0898	10,139
7	10	10	90,732	-0,0466	10,394
7	10	50	92,412	-0,0359	11,108
7	10	100	46,598	-0,0481	10,718

Observa-se na Figura 2 que há grande aderência entre os resultados teóricos e aqueles obtidos por simulação. Vale ressaltar que a faixa de variação do limiar de decisão na Figura

1 corresponde ao uso da matriz de covariância $n\mathbf{R} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger$ no programa em *Mathcad* presente no Apêndice.

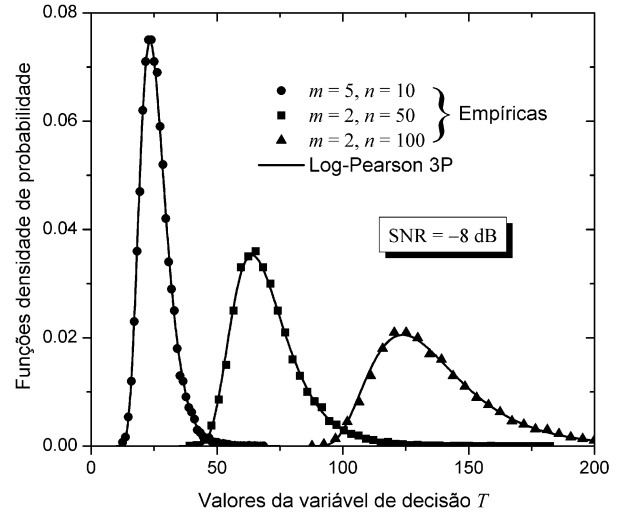


Fig. 1. Funções densidade de probabilidade teóricas e obtidas por simulação (empíricas).

A Figura 3 apresenta curvas ROC (*receiver operating characteristic*) considerando os mesmos conjuntos de parâmetros da Figura 2. Para vários valores do limiar de decisão, as correspondentes probabilidades de falso alarme foram calculadas usando a expressão exata da distribuição cumulativa do máximo autovalor, fornecida em [8, eq. (10)]. A solução de tal expressão pressupõe o uso da rotina para cálculo da função hipergeométrica com argumento matricial proposta em [16]. Durante os cálculos envolvendo tal rotina verificou-se que pode haver problemas de convergência do algoritmo proposto pelo autor, quem generosamente revelou aos autores deste artigo que se trata de um comportamento previsível e inevitável para certos argumentos matriciais da função hipergeométrica, traduzidos aqui em certos valores de m, n e γ .

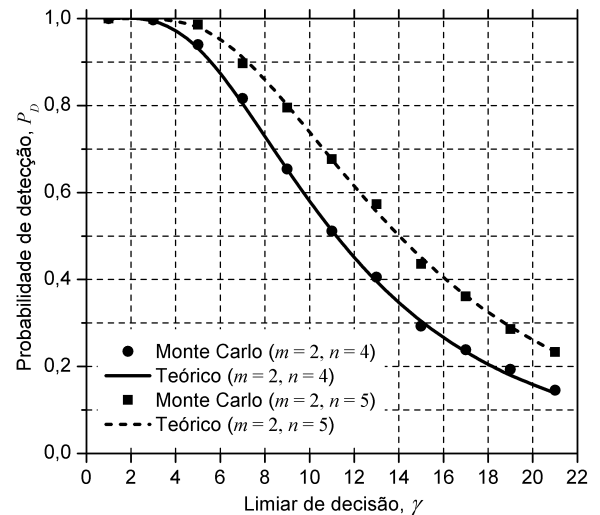


Fig. 2. Curva teórica e obtida por simulação para P_D versus γ .

Segundo o autor de [16], a rotina para cálculo da função hipergeométrica com argumento matricial utiliza a série de Taylor, a qual apresenta problemas de convergência em aritmética de precisão finita: certos valores dos argumentos da função hipergeométrica, produzem termos de valor elevado que se cancelam antes que a série convirja. Por esta razão, os parâmetros escolhidos para gerar as Figuras 2 e 3 foram aqueles que, dentre poucos, não produziram problemas de

convergência na rotina para cálculo da função hipergeométrica.

De posse do conjunto de limiares de decisão, as probabilidades de detecção foram estimadas por simulação de Monte Carlo. Juntamente com os resultados apresentados nas Figuras 1 e 2, os resultados da Figura 3 permitem afirmar que a distribuição Log-Pearson 3P é realmente uma boa aproximação para a função densidade de probabilidade da estatística de teste MED sob a hipótese de que o sinal transmitido pela rede primária está presente.

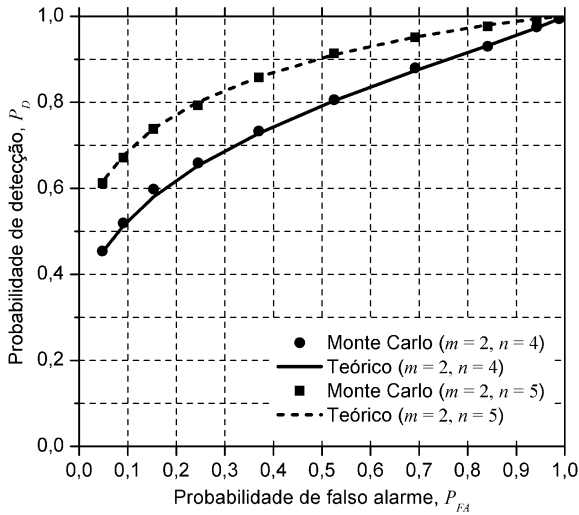


Fig. 3. ROCs teóricas e obtidas por simulação.

IV. CONCLUSÕES

A partir da análise empírica baseada no teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov foi possível estimar a função densidade de probabilidade da estatística de teste (1) para o caso onde cada rádio cognitivo recebe sinal mais ruído, isto é, quando o sinal primário está presente na banda de frequências sensoriada (hipótese H_1). Graças a este resultado é possível computar facilmente a probabilidade de detecção do algoritmo de sensoriamento baseado no máximo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido.

Uma extensão natural deste trabalho consiste em realizar um número de testes de aderência com uma gama maior de parâmetros sistêmicos m, n e SNR para, em seguida, procurar uma relação matemática entre tais parâmetros e os parâmetros a, b e c da distribuição Log-Pearson 3P. Isto facilitaria ainda mais as investigações sobre a probabilidade de detecção em outros cenários além daqueles considerados na Tabela III. Outra extensão natural seria a determinação empírica da distribuição da estatística de teste sob as hipóteses H_0 e H_1 , com mais de um transmissor primário ($p > 1$).

REFERÊNCIAS

[1] M. A. McHenry, P. A. Tenhula and D. McCloskey, “Chicago Spectrum Occupancy Measurements & Analysis and a Long-term Studies Proposal”, *Shared Spectrum Co. report*, November 2005.
 [2] M. H. Islam et al., “Spectrum survey in Singapore: occupancy measurements and analysis”, in *Proceedings of the CROWNCOM’08*, Singapore, May 2008.
 [3] J. Mitola, *Cognitive radio: An integrated agent architecture for software defined radio*, Doctor of Technology, KTH, Sweden, 2000.

[4] Y. Zeng, et al., “A Review on Spectrum Sensing for Cognitive Radio: Challenges and Solutions”, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2010.
 [5] I. F. Akyildiz, B. F. Lo, and R. Balakrishnan, “Cooperative Spectrum Sensing in Cognitive Radio Networks: A Survey”, *Elsevier Physical Comm.* 4, pp. 40-62, 2010.
 [6] A. Kortun, et al., “On the Performance of Eigenvalue-Based Cooperative Spectrum Sensing for Cognitive Radio”, *IEEE J. of Selected Topics In Signal Processing*, vol. 5, no. 1, February 2011.
 [7] B. Nadler, F. Penna, and R. Garello, “Performance of Eigenvalue-based Signal Detectors with Known and Unknown Noise Level”, In: *Proc. of the IEEE ICC*, Kyoto, Japan, June 2011.
 [8] A. Kortun, T. Ratnarajah, and M. Sellathurai, “Exact Performance Analysis of Blindly Combined Energy Detection for Spectrum Sensing”, *IEEE PIMRC’10*, 2010.
 [9] Wikipedia contributors, “Wishart Distribution,” *Wikipedia, The Free Encyclopedia*: http://en.wikipedia.org/wiki/Wishart_distribution (accessed March 15, 2012).
 [10] W. Zhang et al. *Spectrum Sensing Algorithms via Finite Random Matrices. IEEE Trans. on Comm.* Vol. 60, No. 1, Jan 2012.
 [11] S. Cheng (Ed.), “*Foundation of Cognitive Radio Systems*”. Croatia: Intech Inc. 2012.
 [12] Wikipedia contributors, “Kolmogorov–Smirnov test,” *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Kolmogorov%E2%80%93Smirnov_test (accessed March 15, 2012).
 [13] ERI DLC, Table 7: Kolmogorov-Smirnov test. Available: <http://www.ericdlc.com/onlinetextbook/index.cfm?fuseaction=textbook.appendix&FileName=Table7> (accessed March 2012).
 [14] EasyFit - Distribution Fitting Software. <http://www.mathwave.com/products/easyfit.html> (accessed March 15, 2012).
 [15] Wikipedia contributors, “Pearson Distribution,” *Wikipedia, The Free Encyclopedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Pearson_distribution (accessed March 15, 2012).
 [16] P. Koev and A. Edelman, *The Efficient Evaluation of the Hypergeometric Function of a Matrix Argument*, *Math. Comp.* 75 (2006), pp. 833-846.

APÊNDICE I

O programa em *Mathcad* apresentado a seguir tem como objetivo gerar uma amostra de tamanho N da variável de decisão T definida em (1). Os parâmetros de entrada são N, m, n, p e σ^2 , sendo que este último pode assumir qualquer valor sem provocar alterações nos resultados.

```

T := for i ∈ 0..N-1
    for j ∈ 0..p-1
        H(j) ← rnorm ( m, 0, √(1/2) ) + j · rnorm ( m, 0, √(1/2) )
    for k ∈ 0..n-1
        X(k) ← rnorm ( p, 0, √( (SNR/10) · σ² / 2 ) ) + j · rnorm ( p, 0, √( (SNR/10) · σ² / 2 ) )
        V(k) ← rnorm ( m, 0, √(σ²/2) ) + j · rnorm ( m, 0, √(σ²/2) )
        Y(k) ← H · X(k) + V(k)
    nR ← Y · (Y)T
    Di ← | max(eigenvals(nR)) / σ² |
    D
    
```