

Processamento Digital de Sinais

Prof. Luciano Leonel Mendes

S. Mitra, Digital Signal Processing – A computer-based approach, 2nd edition.

Capítulo 1 – Sinais e Processamento de Sinais

- Sinal é uma função de uma variável independente, como tempo, distância, temperatura, etc.

Exemplos:

- Música, que representa a variação da pressão do ar ao longo do tempo em um ponto do espaço.
 - Foto P&B, que representa a variação da intensidade da luz ao longo de duas coordenadas espaciais.
 - Vídeo, que representa a variação de intensidade de luz ao longo das coordenadas X e Y e também ao longo do tempo.
- Todo sinal carrega algum tipo de informação e o objetivo do processamento do sinal é extrair ou modificar a informação contida no sinal.

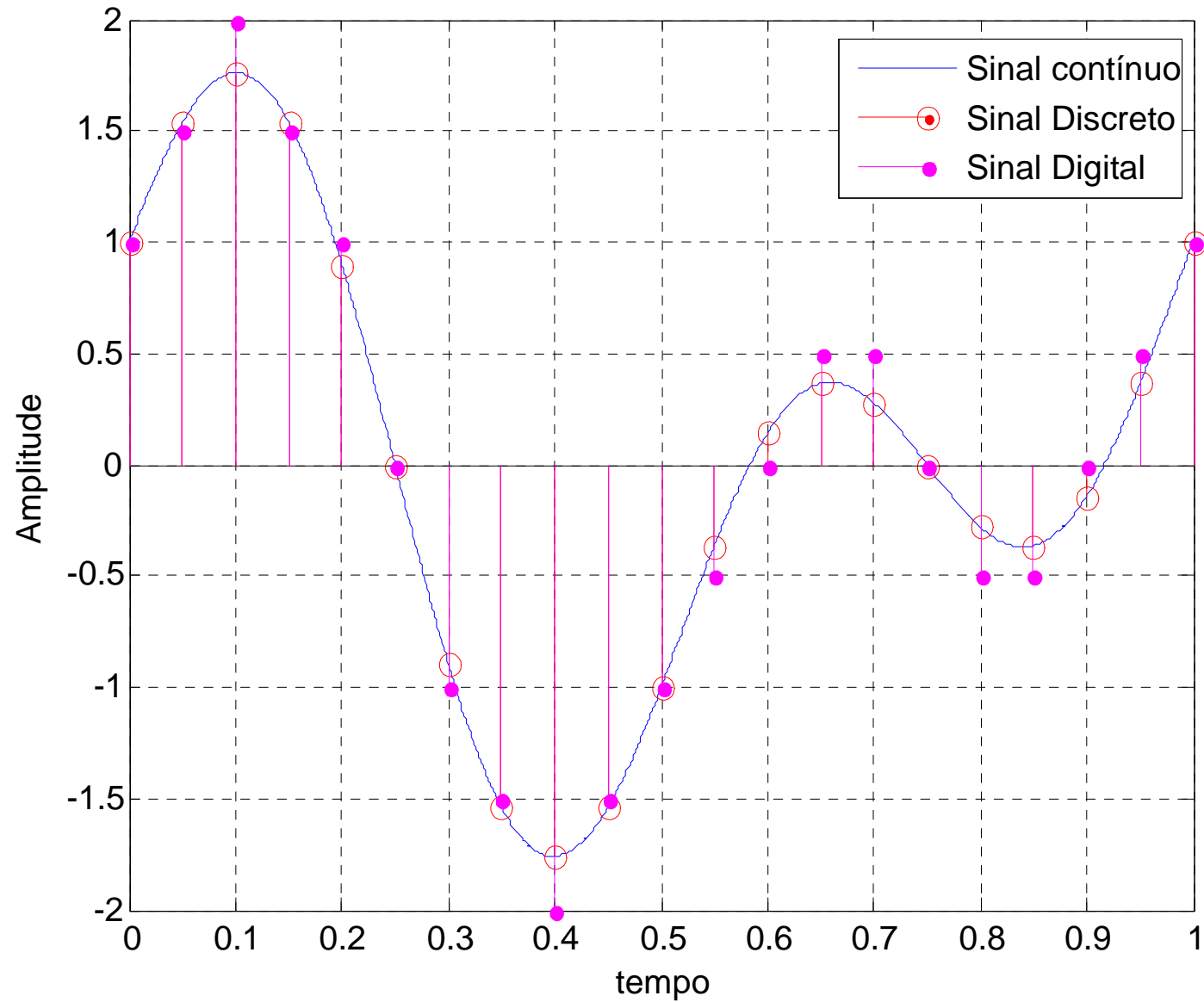
Classificação de Sinais

- Classificação quanto à continuidade
 - Sinais contínuos são aqueles que são definidos para todo e qualquer valor da variável independente. Exemplo: a voz humana.
 - Sinais discretos são aqueles cuja amplitude é definida apenas para valores específicos da variável independente.
Exemplo: temperatura do ensopado tomada de tempos em tempos pela cozinheira.
Quando as amostras do sinal discreto podem assumir um número finito de valores, então o sinal é classificado como digital.
- Classificação quanto à natureza das amostras
 - Sinais reais são aqueles cujas amostras são todas reais.
 - Sinais complexos são aqueles cuja uma ou mais amostras são complexas.

Classificação de Sinais

- Classificação quanto ao número de fontes
 - Sinais escalares são aqueles provenientes de uma única fonte. Exemplo: sinal de áudio mono.
 - Sinais vetoriais são aqueles provenientes de duas ou mais fontes. Exemplo: sinal de áudio estéreo.
- Classificação quanto à dimensão
 - Sinais unidimensionais são aqueles que são função de uma única variável independente. Exemplo: sinal de áudio.
 - Sinais M-dimensionais são aqueles que são função de M variáveis independentes. Exemplo: sinal de vídeo P&B.
- Classificação quanto a aleatoridades
 - Sinais determinísticos são aqueles cujo o valor das amostras podem ser previstos. São funções matemáticas ou tabelas conhecidas a priori.
 - Sinais aleatórios são aqueles cujo o valor das amostras não pode ser conhecido previamente.

Classificação de Sinais



Representação de Sinais

- Normalmente os sinais unidimensionais são funções do tempo. Sua representação matemática é dada por:
 - $f(t)$ para o caso contínuo.
 - $f[n]$ para o caso discreto, onde n é um número inteiro.
- A representação de sinais M-dimensionais é feita listando todas as variáveis independentes.
 - $f(x,y)$; $f(x,y,t)$ para o caso contínuo.
 - $f[n,m]$; $f[n,m,k]$ para o caso discreto, onde n , m e k são inteiros.
- Sinais vetoriais são representados como um conjunto de sinais.

$$\vec{u}(x, y, t) = \begin{bmatrix} r(x, y, t) \\ g(x, y, t) \\ b(x, y, t) \end{bmatrix} \quad \vec{u}[n, m, k] = \begin{bmatrix} r[n, m, k] \\ g[n, m, k] \\ b[n, m, k] \end{bmatrix}$$

Operações Básicas com Sinais

- Inicialmente, iremos focar nas operações básicas realizadas no domínio do tempo.
- As operações apresentadas a seguir são válidas para sinais contínuos. O equivalente para sinais discretos será apresentado no Capítulo 2.

a) Escalonamento: consiste em multiplicar o sinal por uma constante.

Exemplo: $y(t)=a \cdot x(t)$

b) Atraso: gera uma réplica deslocada temporalmente do sinal original.

Exemplo: $y(t)=x(t-T)$

Note que se T for negativo, então o processo consiste em um avanço temporal.

Operações Básicas com Sinais

c) Soma: consiste em somar dois sinais distintos.

Exemplo: $w(t)=x(t)+y(t)$

Esta operação pode ser combinada com o escalonamento para gerar um sinal que seja a combinação linear de outros sinais.

$$g(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cos(\omega_i) + b_i \sin(\omega_i)$$

d) Produto: consiste em obter um novo sinal a partir do produto de dois sinais conhecidos.

Exemplo: $w(t)=x(t) \cdot y(t)$

Dica importante: o restante do capítulo 1 traz aplicações importantes sobre processamento digital de sinais. A leitura das demais sessões deste capítulo é recomendada.

Capítulo 2 – Sinais de Tempo Discreto e Sistemas no Domínio do Tempo

- Sinal de tempo discreto: corresponde a uma seqüência de amostras tomadas a cada T segundos. A amplitude das amostras é contínua.
- Representação no domínio do tempo: as seqüências discretas são representadas como uma seqüência de números. A representação matemática desta seqüência é dada por:

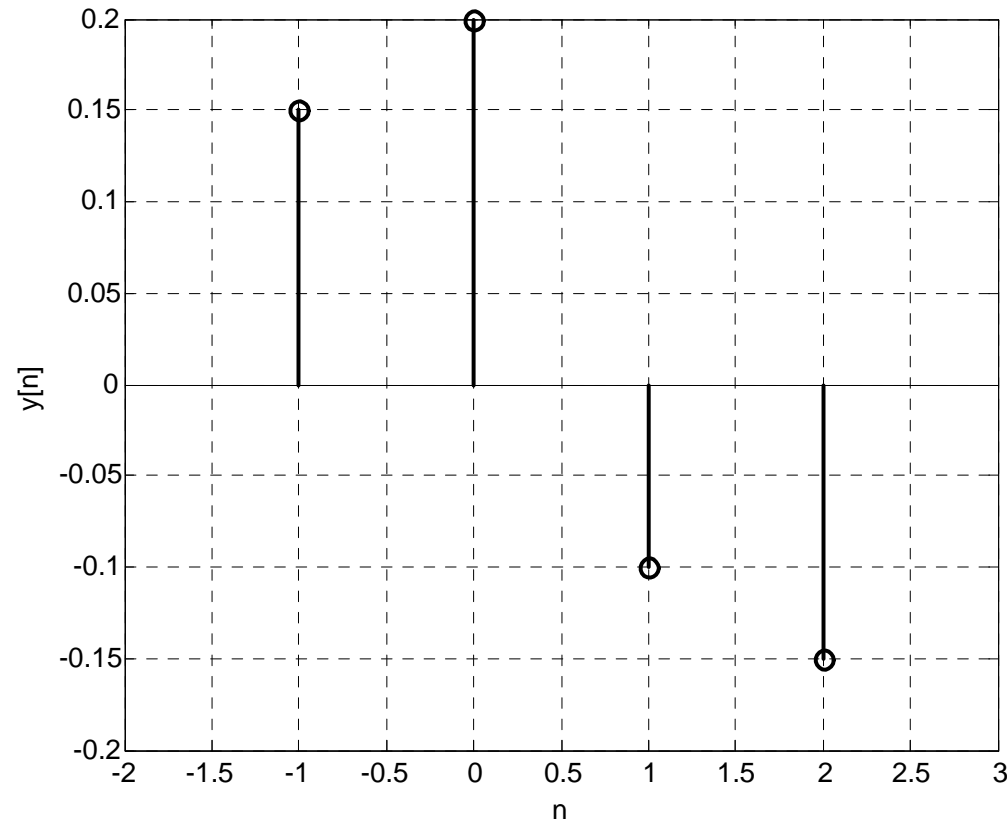
$$x[n] = [0.15, 0.20, -0.1, -0.15]$$

↑

- A seta indica a amostra que corresponde a $n=0$. Note que a seqüência somente é definida para valores de n inteiros.

Representação Gráfica de Seqüências

- A representação gráfica de uma seqüência discreta é feita através de impulsos localizados em valores de n inteiros, cuja área é igual à amplitude da amostra.



Princípios da Amostragem

- Em muitas aplicações as seqüências discretas são obtidas a partir de sinais contínuos.

$$x[n] = x_a(t) \Big|_{t=nT} = x_a(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \cdot \delta(t - nT)$$

- O parâmetro T define o espaçamento temporal entre as amostras e é chamado de tempo de amostragem.
- O inverso deste parâmetro é denominado de freqüência de amostragem.

$$f_T = \frac{1}{T}$$

- Conforme será visto no capítulo 5, a amostragem de um sinal contínuo com largura de faixa limitada não introduz distorções, desde que a freqüência de amostragem seja maior do que duas vezes a maior freqüência que compõe o sinal.

Classificação de Seqüências Discretas

- Classificação quanto á natureza das amostras.
 - Seqüências reais: todas as amostras são reais.
 - Seqüências complexas: uma ou mais amostras são complexas.

Seqüências complexas podem ser representadas como a soma vetorial de duas seqüências reais:

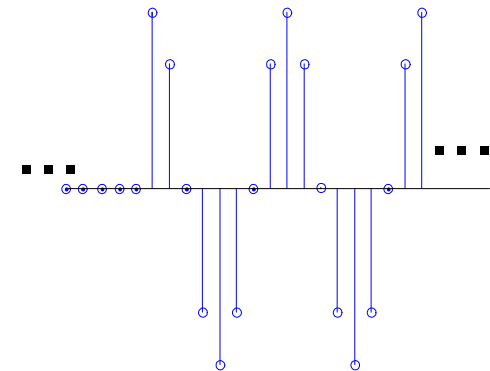
$$x[n] = x_r[n] + j x_i[n]$$

Operações complexas podem ser realizadas nesta representação. Exemplo: o complexo conjugado de $x[n]$ é:

$$x^*[n] = x_r[n] - j x_i[n]$$

Classificação de Seqüências Discretas

- Seqüências digitais: são aquelas cujas amplitudes somente podem assumir um número finito de valores. Quantização é o processo pelo qual uma seqüência discreta torna-se uma seqüência digital. A seqüência digital é expressa por $\hat{x}[n]$.
- Classificação quanto ao comprimento
 - Seqüências infinitas: são aquelas que possuem um número infinito de amostras. Elas são sub-classificadas como:
 - Seqüências direitas: são aquelas que possuem apenas amostras nulas para $n < N_1$ ($x[n]=0$ para $n < N_1$). Se N_1 for um número positivo, então esta seqüência é chamada de causal.

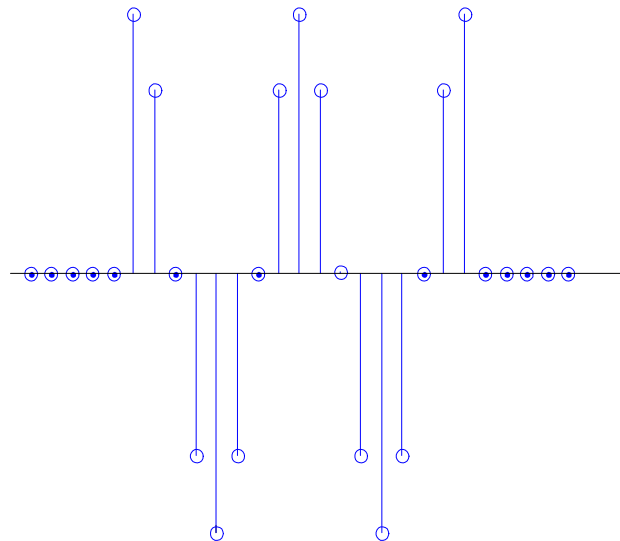


Classificação de Seqüências Discretas

- Classificação quanto ao comprimento
 - Seqüências finitas: são aquelas cujas amplitudes das amostras somente estão definidas no intervalo $[N_1, N_2]$, ou seja, $x[n]$ somente está definida no intervalo $N_1 \leq n \leq N_2$. A duração de uma seqüência finita é dada por:

$$N = N_2 - N_1 + 1$$

Seqüências finitas podem ser expressas como sendo seqüências infinitas introduzindo-se zeros no intervalo fora de $[N_1, N_2]$. Esse processo é denominado de “zero-padding”.

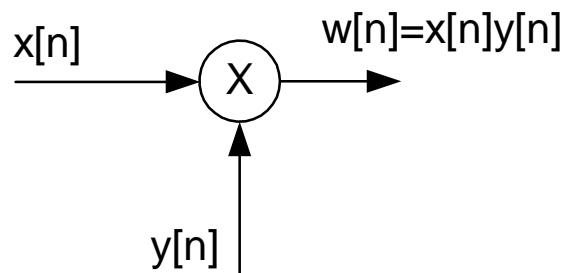


Operações com Seqüências

a) Produto ou Modulação: considere duas seqüência de mesmo comprimento. O produto entre essas seqüências é dado por:

$$w_1[n]=x[n]\cdot y[n]=\{x[N_1] y[N_1], \dots , x[-1] y[-1], x[0] y[0], \dots , x[N_2] y[N_2]\}$$

O esquemático para representar esta operação é dado por:



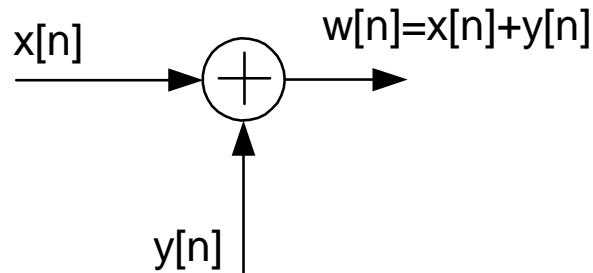
Janelamento: processo pelo qual uma seqüência infinita é transformada em uma seqüência finita através da multiplicação por uma seqüência de comprimento N , denominada de janela.

Operações com Seqüências

b) Adição: considere duas seqüência de mesmo comprimento. A soma entre essas seqüências é dada por:

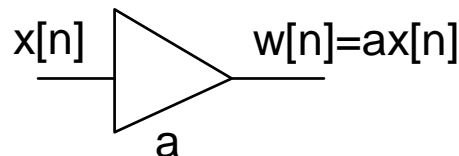
$$w_2[n]=x[n]+y[n]=\{x[N_1]+y[N_1], \dots, x[1]+y[1], x[2]+y[2], \dots, x[N_2]+y[N_2]\}$$

O esquemático para representar esta operação é dado por:



c) Escalonamento: sendo uma seqüência $x[n]$, seu escalonamento é dado por:

$$w_3[n]=a \cdot x[n]=\{a \cdot x[N_1], \dots, a \cdot x[1], a \cdot x[2], \dots, a \cdot x[N_2]\}$$



Operações com Seqüências

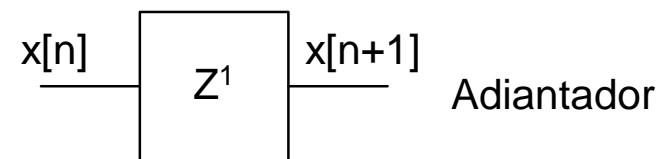
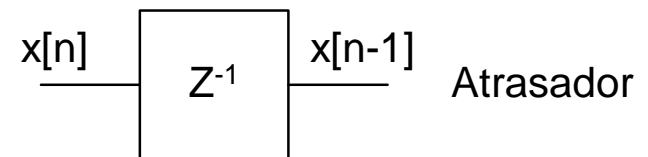
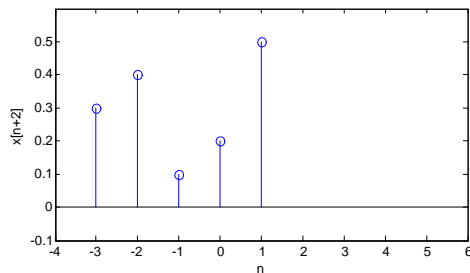
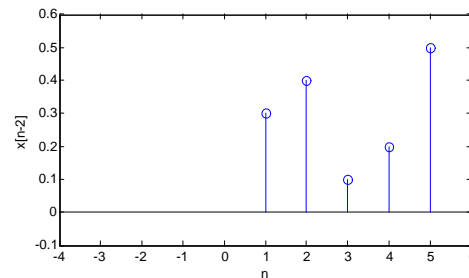
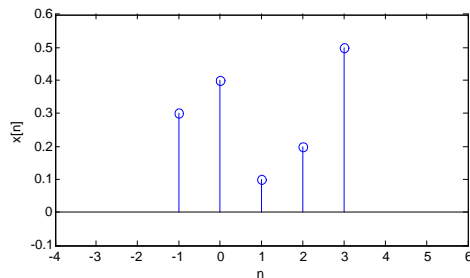
d) Deslocamento temporal: seja uma seqüência $x[n]$. O deslocamento temporal desta seqüência é dado por:

$$w_4[n]=x[n-N]$$

Exemplo: $x[n]=\{0.3, 0.4, 0.1, 0.2, 0.5\}$

a) $N=2 \rightarrow w[n]=x[n-2]=\{0, 0.3, 0.4, 0.1, 0.2, 0.5\}$

b) $N=-2 \rightarrow w[n]=x[n+2]=\{0.3, 0.4, 0.1, 0.2, 0.5\}$



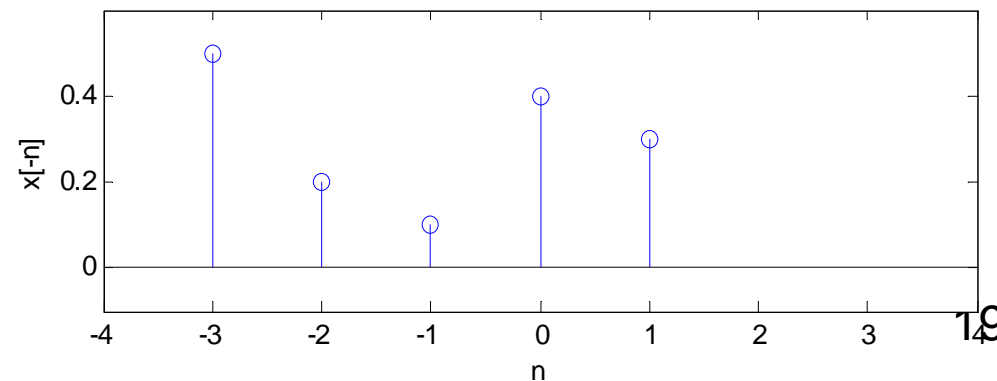
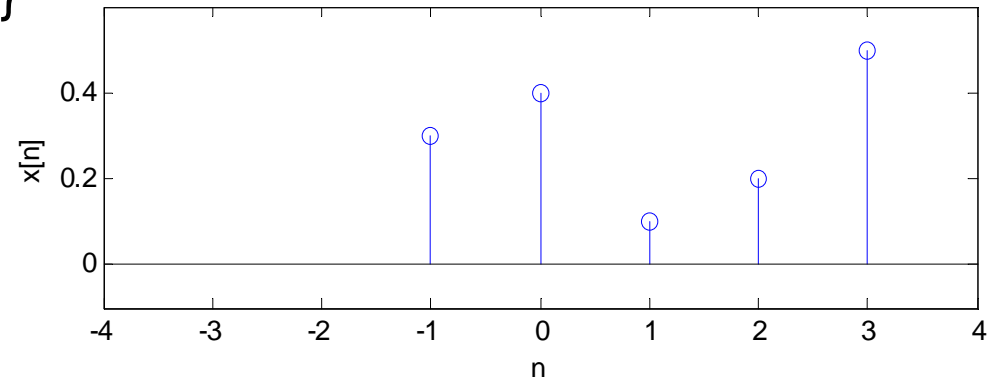
Operações com Seqüências

e) Inversão temporal: consiste em inverter a seqüência ao longo do eixo das amostras.

$$w_5[n]=x[-n]$$

Exemplo: $x[n]=\{0.3, 0.4, 0.1, 0.2, 0.5\}$

$w[n]=x[-n]=\{0.5, 0.2, 0.1, 0.4, 0.3\}$



Operações com Seqüências

f) Alteração na taxa de amostragem: esta operação permite criar uma nova seqüência cuja freqüência de amostragem é maior (sobre-amostragem) ou menor (sub-amostragem) do que a freqüência de amostragem da seqüência original.

- A razão de alteração da freqüência de amostragem é dada por

$$R=f_T'/f_T$$

- Para $R>1$ o processo é chamado de interpolação.

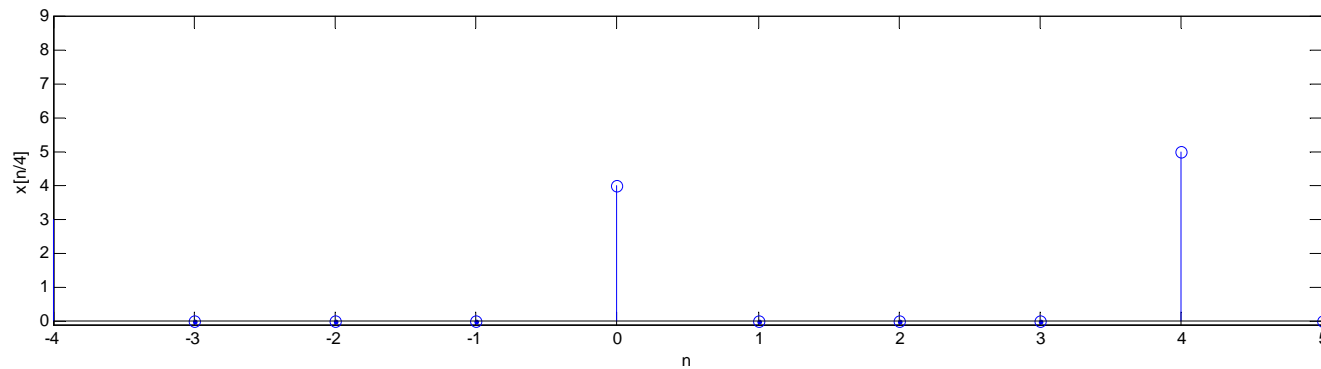
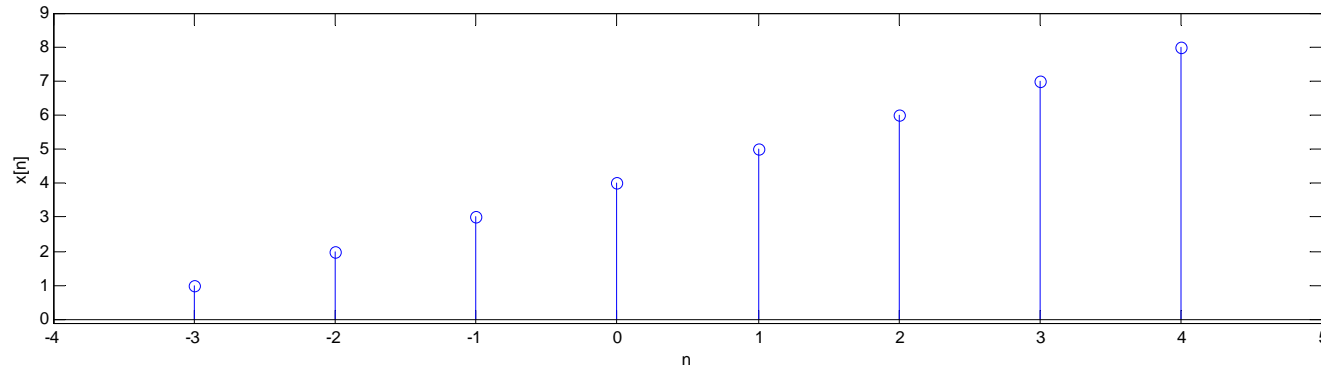
- Para $R<1$ o processo é chamado de dizimação.

- A sobre-amostragem por um fator inteiro L gera uma nova seqüência onde $L-1$ amostras nulas são inseridas entre duas amostras da seqüência original, ou seja,

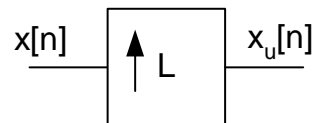
$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right] & , n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

Operações com Seqüências

- Exemplo de interpolação com $L=4$.



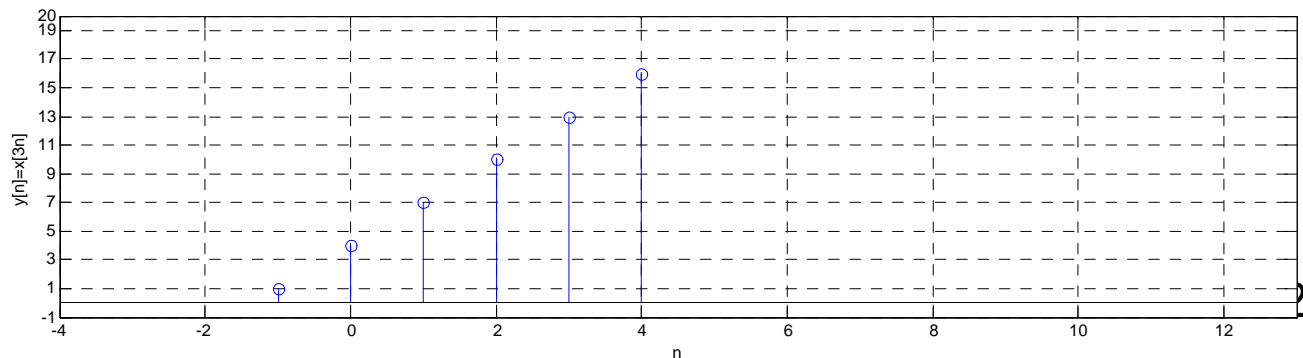
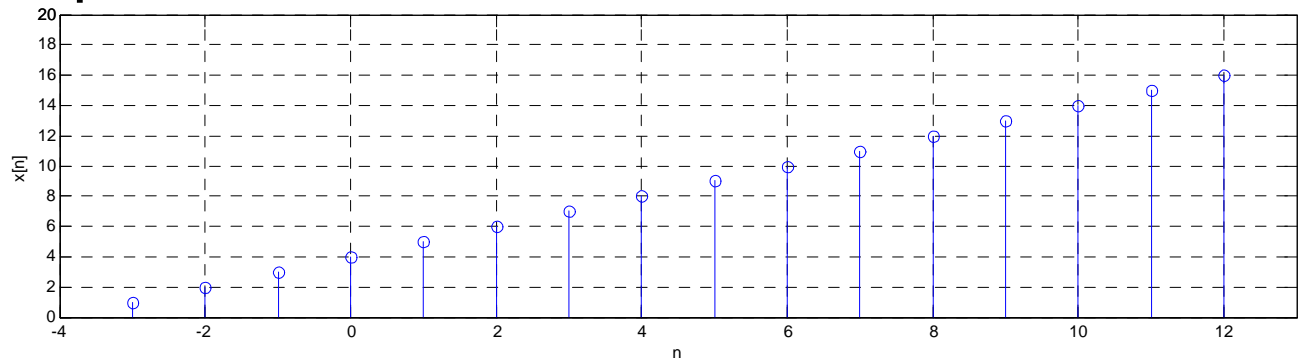
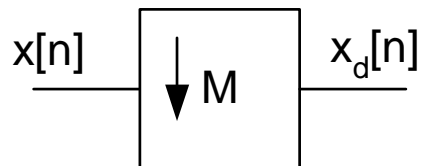
- Esquemático do interpolador



Operações com Seqüências

- A dizimação por um fator M gera uma nova seqüência onde $M-1$ amostras são removidas entre duas amostras que são mantidas. Logo, $y[n] = x[M \cdot n]$
- A seqüência $y[n]$ possui uma freqüência de amostragem M vezes menor do que a seqüência.
- Exemplo: dizimação por $M=3$.

Esquemático do
dizimador:



Exercícios Propostos

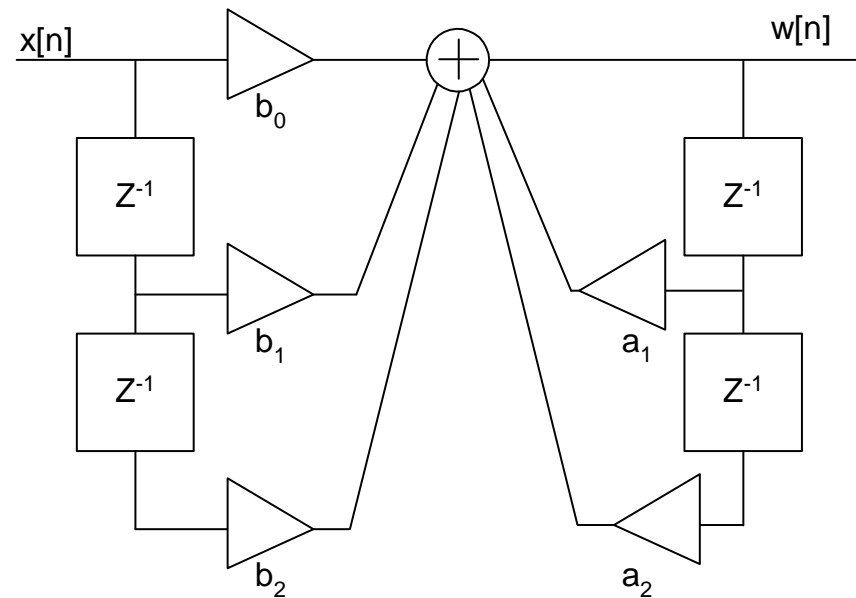
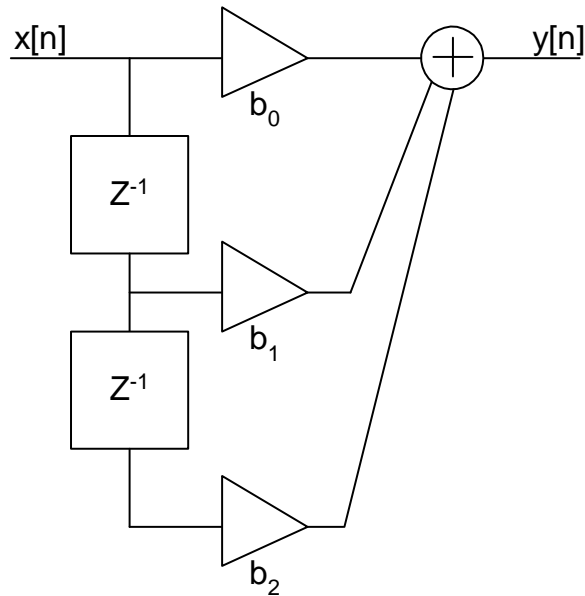
- Desenvolva um algoritmo no Matlab que permita:
 - a) entrar com duas seqüências de comprimento qualquer.
 - b) definir qual amostra da seqüência corresponde à $n=0$.
 - c) realizar o produto das duas seqüências.
 - d) realizar a soma das duas seqüências.
 - e) traçar as seqüências de entrada e os resultados em gráficos distintos.

- Seja $x[n]=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $y[n]=[1, 2, 3, 4, 5, 6]$
Encontre:
 - a) $w_1[n]=3x[n]-2y[n]$
 - b) $w_2[n]=x[n]-y[-n]$
 - c) $w_3[n]=y[n]\cdot y[-n]$
 - d) $w_4[n]=2x[n]-x[n-1]+3y[n-4]$
 - e) $w_5[n] = \sum_{i=0}^2 \left\{ (i+1)x[n-1] + \frac{1}{i+1} y[n+i] \right\}$

Representação Esquemática

- As operações com seqüências podem ser representadas na forma esquemática.

Exemplo: encontre a expressão para obter $y[n]$ e $w[n]$.



Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à simetria:
 - Seqüência conjugada simétrica: uma seqüência é considerada conjugada simétrica se:

$$x[n]=x^*[-n]$$

Uma seqüência conjugada simétrica real é também denominada de seqüência par.

- Seqüência conjugada anti-simétrica: uma seqüência é considerada conjugada anti-simétrica se:

$$x[n]=-x^*[-n]$$

Uma seqüência conjugada anti-simétrica real é também denominada de seqüência ímpar. Se $x[n]$ é conjugada anti-simétrica, então $x[0]$ é puramente imaginária.

Logo, se $x[n]$ for ímpar, então $x[0]=0$.

Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à simetria:
 - Toda seqüência complexa $x[n]$ possui uma componente complexa simétrica e uma componente complexa anti-simétrica, definidas como:

$$x_{cs}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[-n]\}$$

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[-n]\}$$

- Exercício: prove que $x_{cs}[n]$ atende a condição de simetria e que $x_{ca}[n]$ atende a condição de anti-simetria.

- A seqüência original pode ser obtida através de uma combinação linear de $x_{cs}[n]$ e $x_{ca}[n]$:

$$x[n] = x_{cs}[n] + x_{ca}[n]$$

Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à simetria:

- Seqüências reais podem ser representadas pela combinação linear de suas componentes pares e ímpares, definidas como:

$$x_{ev}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x[-n]\}$$

$$x_{od}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x[-n]\} \quad x[n] = x_{ev}[n] + x_{od}[n]$$

- Seqüências finitas entre $[0, N-1]$ podem ser representadas pela sua componente conjugada simétrica periódica e pela sua componente conjugada anti-simétrica periódica. Note que estas seqüências apenas existem para os valores de n definidos para $x[n]$.

$$x_{pcs}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[\langle -n \rangle_N]\} = \{x[n] + x^*[(N-1) - n]\}, 0 \leq n \leq N-1$$

$$x_{pca}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[\langle -n \rangle_N]\} = \{x[n] - x^*[(N-1) - n]\}, 0 \leq n \leq N-1$$

$$x[n] = x_{pcs}[n] + x_{pca}[n]$$

$$\langle k \rangle_N = k \text{ modulo } N$$

Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à simetria:
 - Seqüências conjugadas simétricas periódicas: são aquelas limitadas a $0 \leq n \leq N-1$ que atendem a seguinte condição:
$$x[n] = x^*[N-n]$$
 - Seqüências conjugadas anti-simétricas periódicas: são aquelas limitadas a $0 \leq n \leq N-1$ que atendem a seguinte condição:
$$x[n] = -x^*[N-n]$$
- Exemplos no quadro!

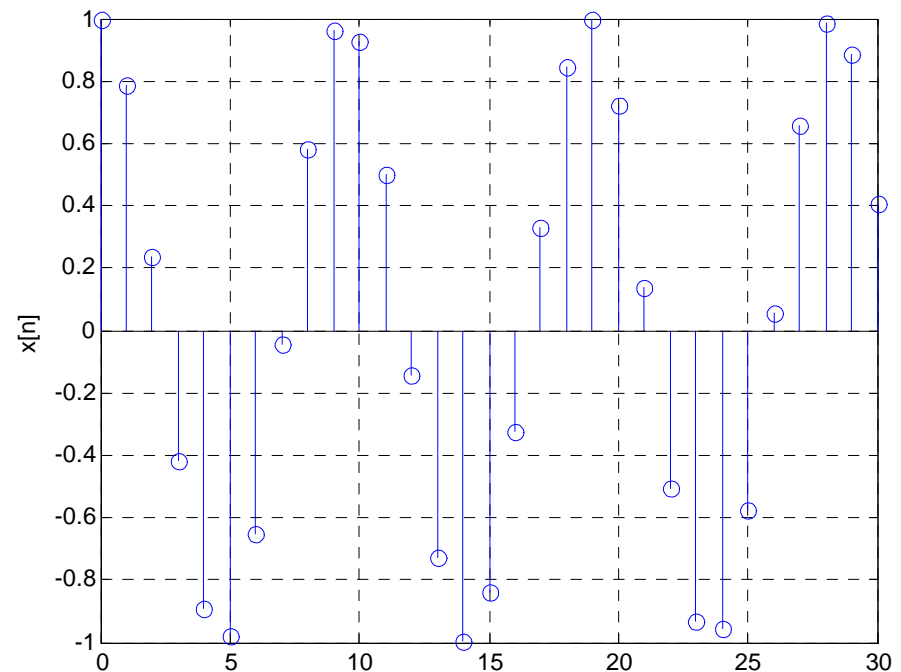
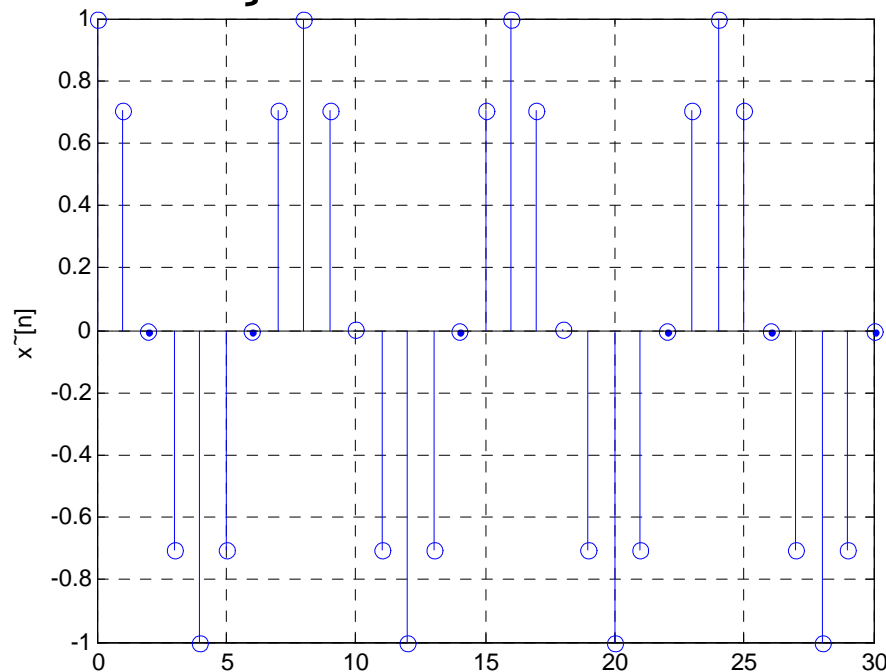
Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à periodicidade
 - Seqüências periódicas: são aquelas que se repetem a cada deslocamento de N amostras, ou seja:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n - kN]$$

onde N é um inteiro positivo e k é um inteiro.

- Seqüências aperiódicas são todas aquelas que não atendem a condição acima.



Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à energia e à potência

- Definição de energia de uma seqüência:

$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

- Definição de potência média de uma seqüência:

$$P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K |x[n]|^2 \quad \text{para seqüência aperiódica}$$

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad \text{para seqüência periódica}$$

- Sinais potência: são aqueles que possuem energia infinita, mas potência média finita.
- Sinais energia: são aqueles que possuem energia média finita e potência média nula.

Outras Classificações para Seqüências

- Exercício: classifique as seqüências abaixo quanto à energia e potência.

a) $x[n] = e^{-n/5}$ $n=\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

b) $x[n] = \text{sen}(\pi/4 \cdot n)$ $n=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

c) $x[n]=1/n$ $n=\{1, 2, 3, \dots\}$

d) $x[n] = \tan(\pi/2 \cdot n)$ $n=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

e) $x[n] = \cos(\pi \cdot n)$ $n=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

f) $x[n] = (-1)^n$ $n=\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à limitação da amplitude das amostras
 - Seqüências limitadas são aquelas que atendem a seguinte condição:

$$|x[n]| \leq B < \infty \text{ para qualquer } n$$

- Classificação quanto à somatória.
 - Seqüências absolutamente somáveis são aquelas que atendem a seguinte condição:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

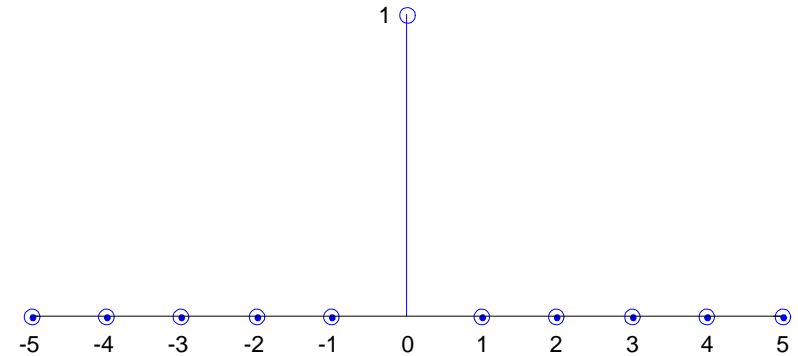
- Seqüências quadráticas-somáveis são aquelas que atendem a seguinte condição:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Seqüências Fundamentais

- Seqüência Impulso Unitário: esta seqüência é útil para caracterizar sistemas de tempo discreto. Sua definição é:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



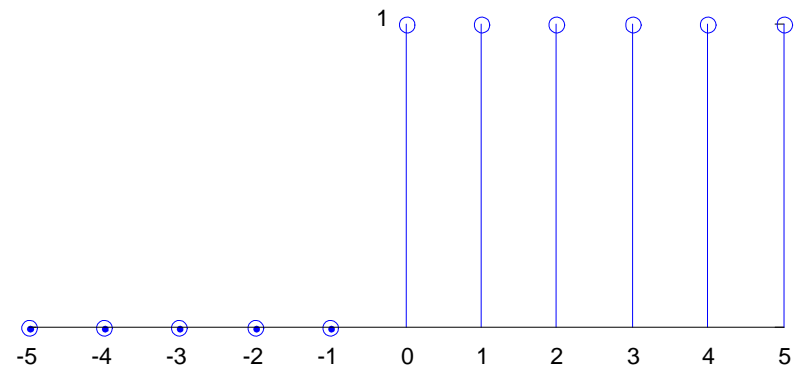
- Seqüência Degrau Unitário: esta seqüência é definida por

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

- Note que:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



Seqüências Fundamentais

- Seqüência Senoidal: esta seqüência é dada por:

$$x[n]=A \cdot \text{sen}(\omega_0 n + \phi) \quad \text{para } -\infty < n < \infty$$

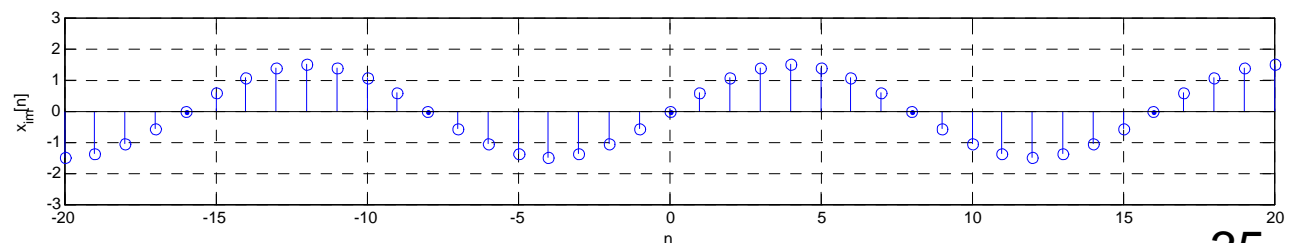
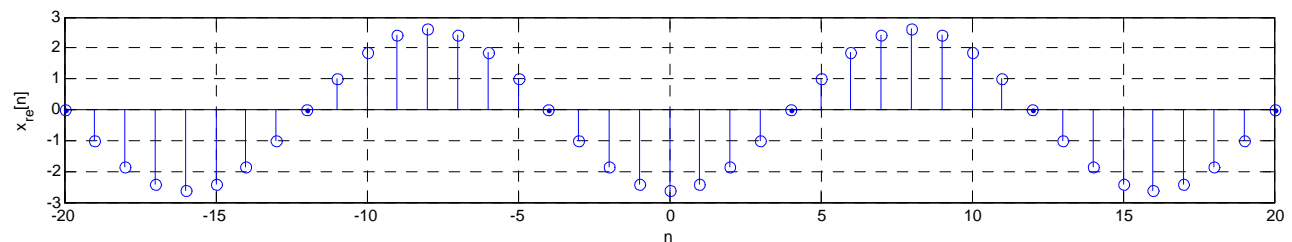
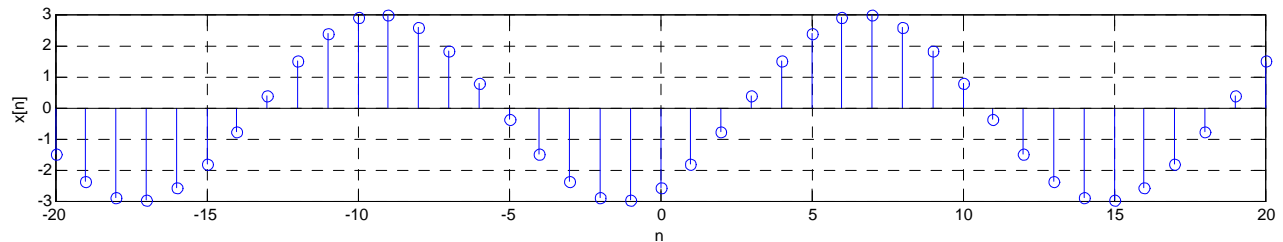
- A seqüência senoidal também pode ser expressa como:

$$x[n]=x_{\text{re}}[n]+x_{\text{im}}[n]$$

onde

$$x_i[n]=A \cdot \text{sen}(\phi) \cos(\omega_0 n)$$

$$x_q[n]=A \cdot \cos(\phi) \text{sen}(\omega_0 n)$$



Seqüências Fundamentais

- Periodicidade de seqüências senoidais:
 - Período fundamental: se $N \cdot \omega_0 = 2\pi r$, onde r é um inteiro então a senóide discreta irá se repetir a cada N amostras. N é o período fundamental da seqüência.
 - Se $2\pi/\omega_0$ for um número racional, então o período da seqüência será múltiplo de $2\pi/\omega_0$. O período da seqüência será igual à $2\pi k/\omega_0$, quando esta divisão for um número inteiro. k deve ser um inteiro.
 - Se $2\pi/\omega_0$ for um número irracional, então a seqüência será aperiódica.

Seqüências Fundamentais

- Propriedades interessantes de senóides discretas:
 - A freqüência angular é dada em radianos ou radianos/amostra
 - Se $\omega_1 = \omega_2 + 2\pi k$, então $\text{sen}(\omega_1) = \text{sen}(\omega_2)$
 - A maior freqüência que uma seqüência senoidal pode apresentar é $\pm \pi$. Logo,

$$\cos(\alpha\pi n) = \cos[(2-\alpha)\pi n]$$

As freqüências em torno de $\pm 2\pi k$ são denominadas de freqüências baixas.

As freqüências em torno de $\pm (2k+1)\pi$ são denominadas de freqüências altas.

Seqüências Fundamentais

- Seqüências Exponenciais: são seqüências expressas na forma

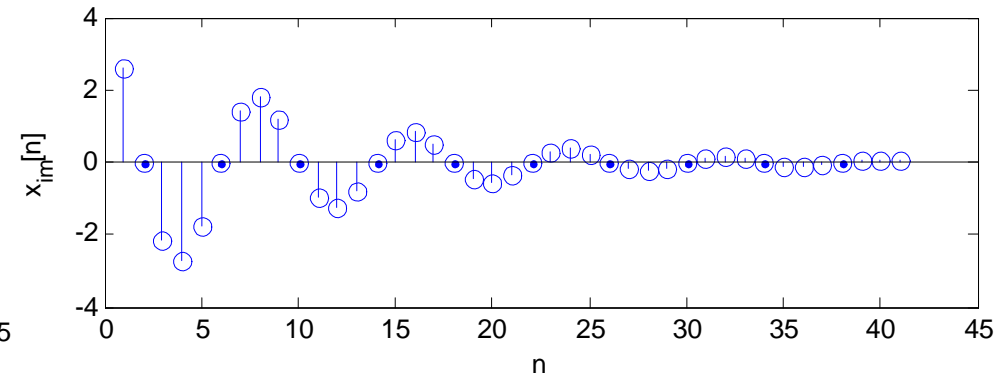
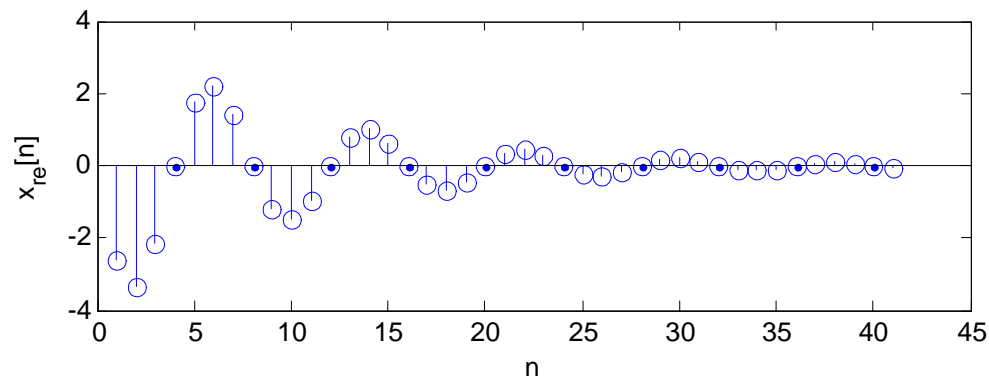
$$x[n] = A\alpha^{k \cdot n}$$

onde A e α podem ser números reais ou complexos e k é um número real.

- Fazendo-se $A=|A|e^{j\theta}$ e $\alpha=\exp(\sigma_0+j\omega_0)$, então tem-se:

$$x[n]=A \exp[(\sigma_0+j\omega_0)n] = |A| \exp(j\theta) \exp[(\sigma_0+j\omega_0)n]$$

$$x[n]=|A|\exp(\sigma_0 n)\cos(\omega_0 n+\theta)+j|A|\exp(\sigma_0 n)\sen(\omega_0 n+\theta)$$



Processo de Amostragem

- Processo pelo qual uma seqüência discreta é formada a partir de um sinal contínuo.

$$x[n] = x_a(t_n) = x_a(nT)$$

- Portanto, as amostras somente serão definidas para os instantes

$$t_n = nT = n/F_T = 2\pi n/\Omega_T$$

onde T é o tempo entre as amostras, F_T é a freqüência de amostragem e $\Omega_T = 2\pi F_T$ é a freqüência angular de amostragem.

- Amostragem de um sinal senoidal:

$$x_a(t) = \cos(\Omega_0 t + \theta), \text{ portanto}$$

$$x[n] = \cos(\Omega_0 nT + \theta) = \cos(2\pi\Omega_0 n/\Omega_T + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

onde $\omega_0 = 2\pi\Omega_0/\Omega_T = \omega_0$ é a freqüência angular digital do sinal, dada em radianos ou radianos/amostra.

Aliasing

- Aliasing é o fenômeno que ocorre quando há ambigüidade na representação por seqüência discreta de dois ou mais sinais contínuos.
- Exemplo no Quadro!
- Todos os sinais contínuos das seguintes famílias:

$$x(t) = \cos [(\Omega_0 + k\Omega_T)t + \theta] \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ e}$$

$$x(t) = \cos [(k\Omega_T - \Omega_0)t + \theta] \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

são representados pela mesma seqüência discreta:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n + \theta) = \cos\left(2\pi \frac{\Omega_0}{\Omega_T} n + \theta\right)$$

- Exercício proposto: prove que a afirmação acima é verdadeira.

Aliasing

- Exemplo: encontre a seqüência discreta para representar o sinal:

$$x(t) = 6 \cos(60\pi t) + 3 \sin(300\pi t) + 2 \cos(340\pi t) + 5 \cos(500\pi t) + 10 \sin(660\pi t)$$

sabendo que a freqüência de amostragem é de 200Hz.

Recupere o sinal analógico a partir da seqüência discreta.

- Refaça o exemplo anterior com uma freqüência de amostragem igual à 1kHz.
- Este exemplo deixa claro que para que não ocorra aliasing é necessário que as freqüências angulares da seqüência digital devem estar limitadas na faixa $0 \leq \omega \leq \pi$.
- Portanto, para que um sinal contínuo seja representado por suas amostras sem ambigüidade é necessário que

$$F_T \geq 2f_{\max}$$

$$\Omega_T \geq 2\Omega_{\max}$$

Sistemas de Tempo Discreto

- Sistemas de Tempo Discreto (STD) processam uma seqüência de entrada para fornecer uma seqüência de saída.
- As amostras de saída são processadas segundo o índice de tempo de entrada, n , ou seja, a saída é sempre seqüencial.
- Em termos práticos, sistemas discretos sempre operam com seqüências digitais e, por isso, são comumente denominados de filtros digitais.



Sistemas de Tempo Discreto

- Exemplos de Sistemas de Tempo Discreto: Acumulador.

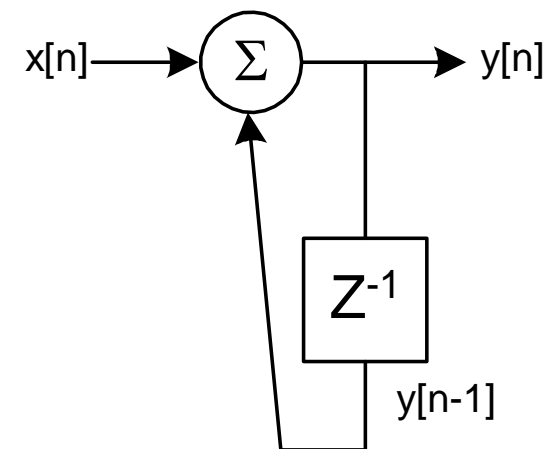
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

Para sistemas causais, $y[-1]$ pode ser visto como um valor inicial para o acumulador. Assim, pode-se escrever que:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k] + \sum_{k=0}^n x[k] = y[-1] + \sum_{k=0}^n x[k]$$

onde o segundo termo da expressão acima é denominado de acumulador causal.

- Exercício proposto: escreva um código em MATLAB para implementar o acumulador. O programa deve permitir a entrada de qualquer seqüência discreta.



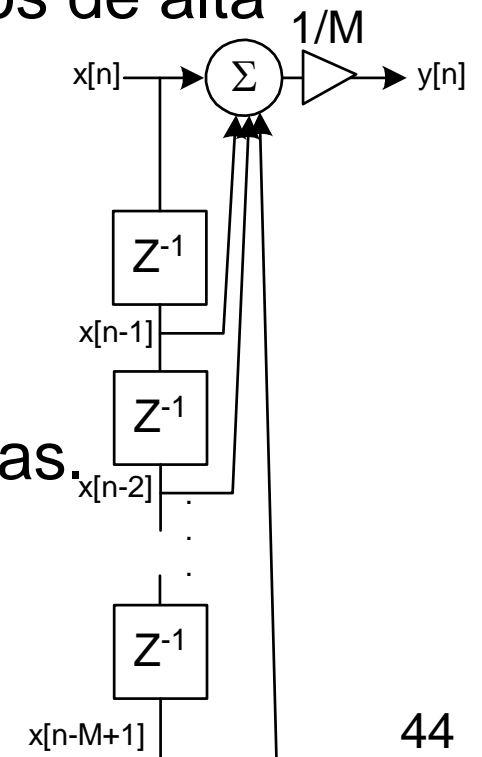
Sistemas de Tempo Discreto

- Exemplos de Sistemas de Tempo Discreto: Média Movente. Este sistema realiza a média em uma janela de M amostras.

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

A média movente pode ser utilizada para filtrar sinais de baixa freqüência que estejam contaminados com ruídos de alta freqüência.

Exercício proposto: desenvolva um programa em MATLAB que permita filtrar uma seqüência qualquer utilizando média movente de M amostras.



Classificação de Sistemas de Tempo Discreto

- Sistema Linear: é aquele em que o princípio da superposição é válido, ou seja, se

$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

então,

$$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

Assim, a resposta de um sistema linear a uma seqüência de entrada pode ser expressa como uma combinação linear da resposta de cada uma das componentes do sinal de entrada.

- Exemplo: acumulador.

Classificação de Sistemas de Tempo Discreto

- Sistema Invariante ao Deslocamento ou Invariantes no Tempo:
 - São aqueles em que o instante no qual a seqüência de entrada é aplicada não afeta o resultado da saída.
 - Se $y[n]$ é a resposta de um sistema ID ou IT à uma seqüência $x[n]$, então a resposta para uma seqüência $x_1[n]=x[n-N_0]$ é simplesmente $y_1[n]=y[n-N_0]$
- Sistemas Discretos Lineares e Invariantes no Tempo (LIT): são aqueles que, ao mesmo tempo, são lineares e invariantes no tempo.
 - A maior parte dos sistemas em discussão neste curso são classificados como LIT.
 - Exercício proposto: prove que um interpolador não é um sistema invariante no tempo.

Classificação de Sistemas de Tempo Discreto

- Sistema Causal: é aquele cuja uma amostra de saída somente depende das amostras passadas e não depende das amostras futuras. Ou seja, $y[n_0]$ somente depende das amostras cujo índice é menor que n_0 .
- Sistema Estável: é aquele que se a entrada for limitada em amplitude, então a saída também será. Assim, se

$$|x[n]| < B_x, \text{ então } |y[n]| < B_y, \text{ qualquer que seja } n.$$

Este tipo de estabilidade é denominado de estabilidade BIBO (*Bounded Input Bounded Output*).

- Sistema Passivo e Sistema Sem Perdas: Um sistema é passivo se a energia do sinal de saída é menor ou igual à energia do sinal de entrada. Se a igualdade for satisfeita, então o sistema é classificado como sem perdas.

Exemplo: $y[n] = \alpha x[n-N]$ onde $N > 0$.

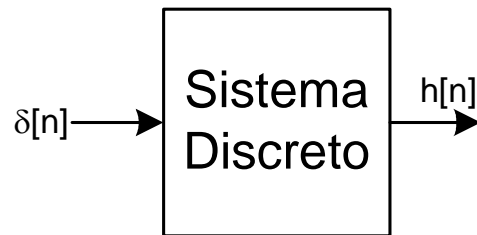
$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \alpha^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \alpha^2 E_x$$

Se $\alpha < 1$, o sistema é classificado como passivo.

Se $\alpha = 1$, o sistema é sem perdas.

Caracterização de Sistemas Discretos

- Resposta ao Impulso: um filtro digital LIT pode ser caracterizado pela sua resposta ao impulso, que é a seqüência que aparece na saída do filtro quando a seqüência impulso unitário é aplicada na sua entrada.



- Exemplo: encontre a resposta ao impulso do sistema discreto acumulador e sistema discreto de média movente.
- Resposta ao Degrau: um filtro LIT pode ser caracterizado pela sua resposta ao degrau unitário, que é a seqüência que aparece na saída do filtro quando o degrau unitário é aplicado na entrada.
 - Exercício proposto: encontre a resposta ao degrau do sistema discreto acumulador e sistema discreto de média movente.

Caracterização de Sistemas Discretos

- Uma seqüência pode ser representada por uma soma ponderada de funções impulso:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]$$

- Assim, um sistema LIT (onde o princípio da superposição é válido) pode ter a saída expressa como sendo uma combinação linear das respostas ao impulsos ponderadas e deslocadas ao longo do tempo.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

- A expressão acima pode ser reescrita na forma

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - k] \cdot h[k]$$

que é conhecida como convolução discreta. Logo

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Caracterização de Sistemas Discretos

- Exercícios propostos:

1) Prove que a convolução discreta atende as seguintes propriedades:

a) Associação

b) Distribuição

c) Comutação

2) Encontre a seqüência de saída para os seguintes casos:

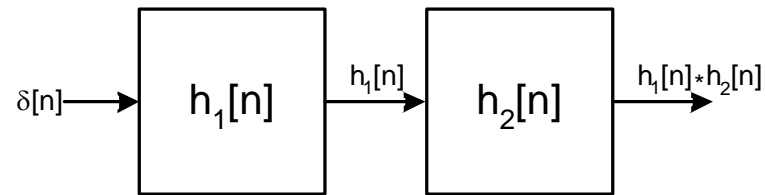
a) $x[n]=[2 \ 4 \ -1 \ 0 \ 1 \ -2]$ e $h[n]=[3 \ 2 \ 1]$

b) $x[n]=\exp(-0.1n)$ para $-1 < n < 5$ e $h[n]=1$ para $-1 < n < 4$

c) $x[n]=\cos(0.2\pi n)$ para $-5 < n < 5$ e $h[n]=[-0.6 \ 0.3 \ 0 \ 0.3 \ 0.6]$

Interconexões de Sistemas LIT

- Conexão em Cascata: ocorre quando a saída de um sistema é conectado na entrada de outro sistema.



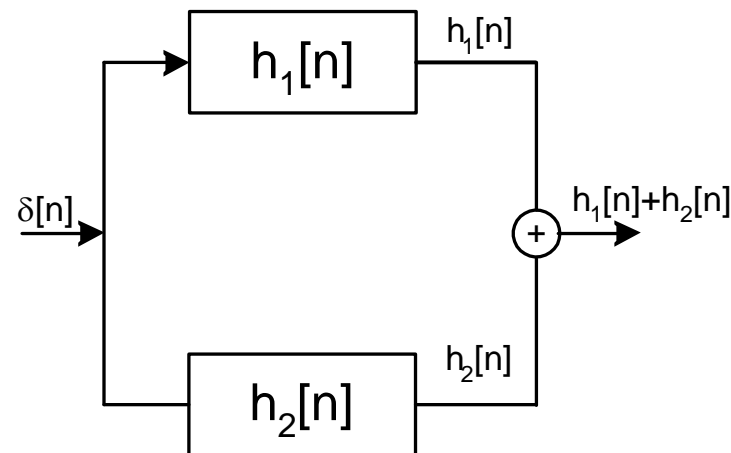
- A resposta ao impulso do sistema como um todo é dada pela convolução entre as respostas ao impulso dos sistemas individuais.
- A conexão em cascata de dois sistemas estáveis BIBO resulta em um sistema estável BIBO e a conexão em cascata de dois sistemas passivos (ou sem-perdas) resulta em um sistema passivo (sem-perdas).
- Sistemas inversos: dois sistemas são ditos inversos se:

$$h_1[n]*h_2[n]=\delta[n]$$

- Exemplo no quadro: encontre o sistema inverso de um acumulador.

Interconexões de Sistemas LIT

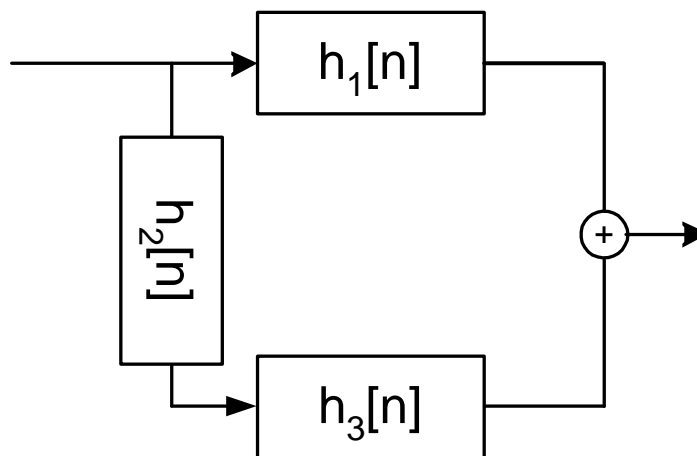
- Conexão Paralela: se dois sistemas recebem a mesma seqüência de entrada e as saídas destes sistemas são somadas para se obter uma única saída, então estes sistemas estão ligados em conexão paralela.



- Exercício proposto: prove que dois sistemas estáveis em paralelo resulta também em um sistema estável.
- Exercício proposto: prove que dois sistemas passivos ou sem-perdas em paralelo pode não resultar em um sistema passivo ou sem-perda.

Interconexões de Sistemas LIT

- Exemplo: encontre a resposta ao impulso do sistema abaixo.



$$h_1[n] = 2\delta[n] - 0.52\delta[n-2]$$

$$h_2[n] = -\delta[n] + 0.1\delta[n-1]$$

$$h_3[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Classificação em termos da Resposta ao Impulso

- Um sistema BIBO estável deve ter resposta ao impulso que atenda a seguinte condição:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = S < \infty$$

- Para que um sistema seja causal, é necessário que a sua resposta ao impulso seja causal, ou seja:

$$h[n]=0 \text{ para } n < 0$$

- Prova no quadro!

Sistemas LTI com Dimensão Finita

- Considere um sistema LIT caracterizado pela seguinte equação diferença:

$$\sum_{k=0}^N d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M p_k x[n-k]$$

onde $x[n]$ é a entrada, $y[n]$ é a saída, p_k e d_k são coeficientes constantes. A ordem deste sistema. A ordem deste sistema é

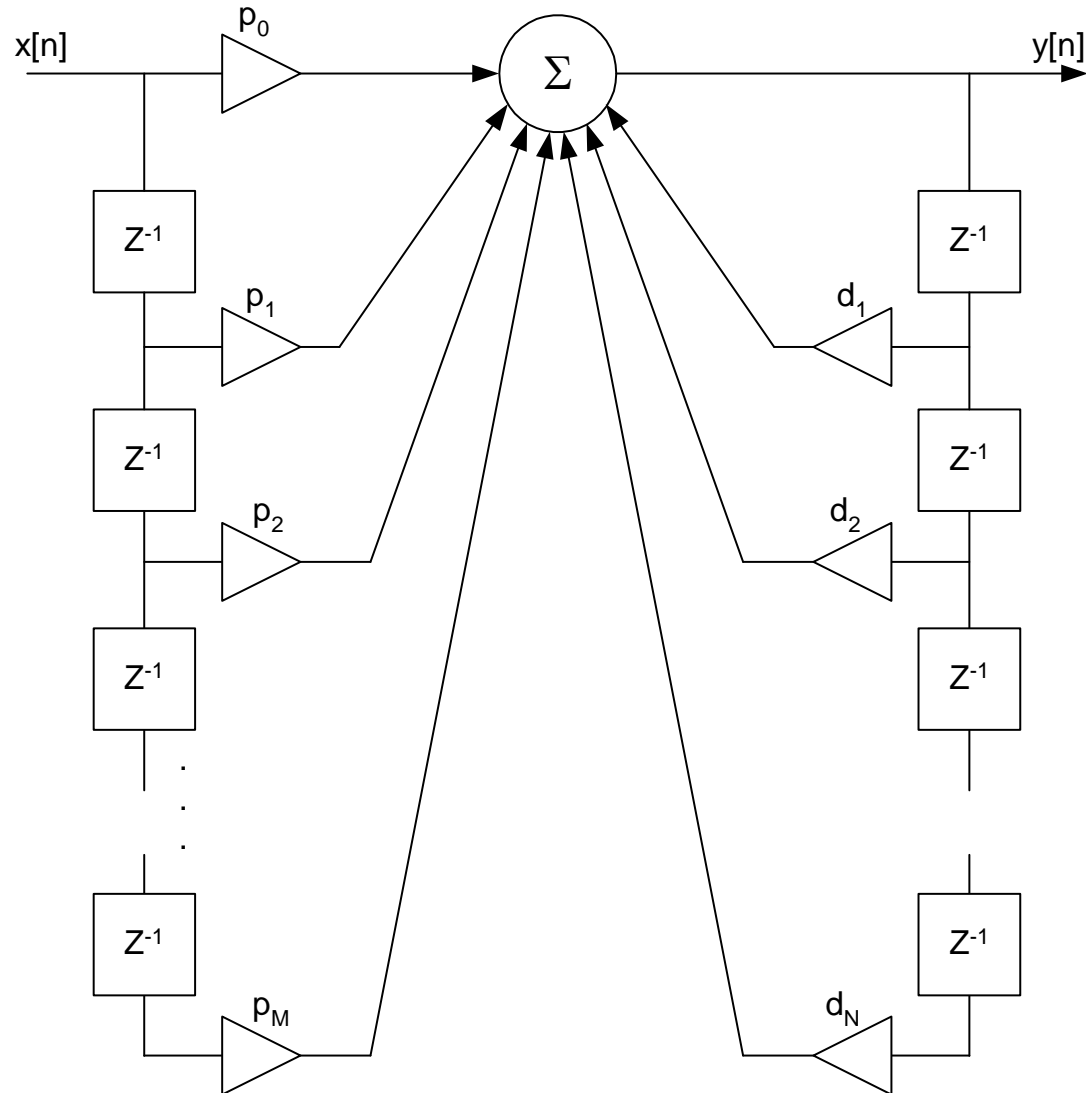
$$L = \max(N, M)$$

- Como a soma dos elementos de entrada e saída é finita, pode-se implementar este sistema na prática, mesmo que em geral a resposta ao impulso seja infinita. A saída deste sistema é dada por:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{p_k}{d_0} x[n-k]$$

Sistemas LTI com Dimensão Finita

- Esquemático de um sistema LTI com dimensão finita:



Sistemas LTI com Dimensão Finita

- A solução para a equação diferença para determinar $y[n]$ é similar à solução da equação diferencial de um sistema contínuo, onde a solução é a soma de um termo particular ($y_p[n]$) e de um termo homogêneo ($y_c[n]$).

$$y[n]=y_c[n]+y_p[n]$$

- Solução homogênea: é obtida quando $x[n]=0$, ou seja

$$\sum_{k=0}^N d_k y[n-k] = 0$$

A solução desta equação pode ser obtida assumindo que

$$y_c[n]=\lambda^n$$

Então, pode-se escrever que

$$\sum_{k=0}^N d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N d_k \lambda^{n-k} = \lambda^{n-N} (d_0 \lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + d_2 \lambda^{N-1} + \dots + d_{N-1} \lambda + d_N)$$

que é a equação polinomial característica do sistema discreto, onde λ_n é a n -ésima raiz do polinômio, o que significa que a solução homogênea é da forma:

$$y_c[n] = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \dots + \alpha_{N-1} \lambda_{N-1}^n + \alpha_N \lambda_N^n$$

onde α_i são constantes que dependem das condições iniciais.

Sistemas LTI com Dimensão Finita

- Quando a equação polinomial possui raízes iguais, $y_c[n]$ assume a forma:

$$y_c[n] = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 n \lambda_1^n + \alpha_3 n^2 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_L n^{L-1} \lambda_1^n + \alpha_{L+1} \lambda_2^n + \cdots + \alpha_N \lambda_{N-L}^n$$

- Para determinar a solução particular, assume-se que $y_p[n]$ possui a mesma forma que $x[n]$.

- Exemplo: encontre a solução completa para um sistema caracterizado pela seguinte equação diferença:

$$y[n] + y[n-1] - 6y[n-2] = 8u[n]$$

sabendo que $y[-2] = -1$ e $y[-1] = 1$.

Zero-Input e Zero-State Responses

- Outra maneira de obter a solução para a equação diferença é calcular a Zero-Input response ($y_{zi}[n]$) e Zero-State response ($y_{zs}[n]$).
- $y_{zi}[n]$ é obtida resolvendo-se a equação polinomial característica para $x[n]=0$.
- $y_{zs}[n]$ é obtida resolvendo-se a equação polinomial característica para a entrada específica e fazendo todas as condições iniciais serem nulas.
- Exemplo: utilize o método descrito acima para encontrar a solução da equação diferença do exemplo anterior.

Resposta ao Impulso de Sistemas Causais

- A equação diferença pode ser utilizada para calcular a resposta ao impulso de um sistema causal.
- Para isto, basta calcular a solução homogênea, já que $x[n]=0$ para $n>0$ e, portanto, $y_p[n]=0$.
- As condições iniciais estão restritas à $h[0]=1$, já que o sistema é causal, ou seja, $h[n]=0$ para $n<0$.
- Note que a resposta ao impulso de sistemas descritos na forma

$$\sum_{k=0}^N d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N p_k x[n-k]$$

apresenta uma resposta ao impulso de comprimento infinito, a menos que $d_0=1$ e $d_k=0$ para $k>0$.

- Exemplo: encontre a resposta ao impulso do exemplo anterior.

Estabilidade BIBO de um Sistema LIT

- Em via geral, se $h[n] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ então o sistema é BIBO estável. No entanto, é impossível afirmar a estabilidade a partir apenas de algumas amostras de $h[n]$.
- A condição única e suficiente para determinar a estabilidade de um sistema está presente nas raízes da equação polinomial característica.
- Se $|\lambda_i| < 1$ para qualquer valor de i , então o sistema é BIBO estável. Caso $|\lambda_i| > 1$ para um valor específico de i , então o sistema é BIBO instável.
- Exercício proposto: prove a afirmação acima.

Classificação de Sistemas LIT

- Classificação quanto ao comprimento da resposta ao impulso
 - Resposta ao impulso finita: um sistema cuja resposta ao impulso seja nula para $n > N_2$ e $n < N_1$, sendo $N_2 > N_1$ é classificado como FIR.
 - A saída deste sistema é dada por

$$y[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k]$$

- Note que a saída é formada por uma soma finita de amostras de entrada, tornando a implementação simples.
- Resposta ao impulso infinita: um sistema cuja resposta ao impulso possui um número infinito de amostras é classificado como IIR.
- No caso de um sistema causal, a saída é dada por:

$$y[n] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k]$$

- Note que a medida em que n aumenta, há um aumento no número de amostras de entrada envolvidas no computo da amostra de saída. Se n for muito grande, a implementação pode-se tornar inviável.

Classificação de Sistemas LIT

- Classificação quanto ao processo de cálculo da saída:
 - Sistemas não recursivos: são aqueles cuja amostra de saída atual pode ser calculada seqüencialmente em função apenas da amostra presente e das amostras passadas da entrada.
 - Sistemas recursivos: são aqueles cuja amostra de saída atual pode ser calculada seqüencialmente em função das amostras de saída passadas, da amostra atual de entrada e das amostras passadas de entrada.
 - Exercício proposto: mostre que é possível representar um filtro acumulador tanto na forma recursiva quanto na forma não-recursiva.

Classificação de Sistemas LIT

- Classificação quanto à natureza dos coeficientes:
 - Sistema de tempo discreto real: é aquele cuja resposta ao impulso possui todas as amostras reais.
 - Sistema de tempo discreto complexo: é aquele cuja resposta ao impulso possui um ou mais amostras complexas.

Correlação de Sinais

- Correlação é a medida de similaridade entre dois sinais.
 - Exemplos: radar, sistemas de recepção digital, reconhecimento de padrões.
- Correlação cruzada: é o grau de similaridade entre dois sinais de energia, dada por

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l] \quad \text{para } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

onde l indica um atraso entre as duas seqüências.

- Exemplo: prove que $r_{yx}[l] = r_{xy}[-l]$

Correlação de Sinais

- Função de auto-correlação: é uma medida de similaridade entre uma seqüência e sua versão atrasada de l amostras.

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-l] \quad \text{para } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- Note que:

a) $r_{xx}[0] = E_x$

b) $r_{xx}[l] = r_{xx}[-l]$, o que significa que a função de auto-correlação é par.

- Exercício proposto: encontre a função de auto-correlação e correlação cruzada das seguintes seqüências:

a) $3\cos(0.1\pi n)$

b) $0.3\text{sen}(0.1\pi n)$

Correlação de Sinais

- A função de correlação pode ser expressa na forma de convolução. Compare as expressões a seguir:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l] \quad \text{para } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- Claramente, pode-se escrever que

$$r_{xy}[l] = x[l] * y[-l]$$

- Exercício proposto: desenvolva no Matlab uma função que realize a correlação de duas seqüências quaisquer de entrada utilizando a função de convolução. Note que as bases de tempo das seqüências de entrada devem ser levadas em consideração.

Propriedades da Função Correlação

- Limitação da função de auto-correlação.

$$r_{xx}[l] \leq r_{xx}[0]$$

- Prova no quadro.

- Limitação da função de correlação: se $y[n]=+/-bx[n-N]$, então

$$-br_{xx}[0] \leq r_{xy}[l] \leq br_{xx}[0]$$

- Prova no quadro.

- Forma normalizada da correlação

$$\rho_{xx}[l] = \frac{r_{xx}[l]}{r_{xx}[0]}$$

$$\rho_{xy}[l] = \frac{r_{xy}[l]}{\sqrt{r_{xx}[0] \cdot r_{yy}[0]}}$$

- Qual é o máximo valor de $\rho_{xx}[l]$ e $\rho_{xy}[l]$?

Propriedades da Função Correlação

- Correlação e auto-correlação para sinais de potência.

$$r_{xy}[l] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K x[n]y[n-l]$$

$$r_{xx}[l] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K x[n]x[n-l]$$

- Correlação e auto-correlação para sinais periódicos

$$r_{\tilde{x}\tilde{y}}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \tilde{y}[n-l]$$

$$r_{\tilde{x}\tilde{x}}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \tilde{x}[n-l]$$

- A periodicidade da função de correlação é igual à periodicidade das seqüências envolvidas.

Capítulo 3 – Sinais Discretos no Domínio da Freqüência

- A transformada de Fourier é uma representação contínua no domínio da freqüência de uma seqüência discreta no domínio do tempo.
- Como a DTFT é periódica com um período de 2π radianos, então apenas N amostras desta transformada são suficientes para representar uma seqüência discreta de N pontos, conforme será mostrado posteriormente. Esta representação é denominada de transformada discreta de Fourier – DFT.
- Outra maneira de representar seqüências discretas no domínio da freqüência é utilizar uma generalização da DFT, denominada de transformada z , onde z é uma variável complexa.

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- A DTFT consiste na representação da seqüência $x[n]$ em termos de $e^{-j\omega n}$, onde ω é a freqüência.
- Nem todas as seqüências possuem uma transformada, mas quando possuem essa transformada é única. Para recuperar a seqüência original a partir da sua transformada, basta aplicar a IDTFT.
- A DTFT de uma seqüência é dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- A DTFT é, normalmente, uma função complexa que pode ser escrita na forma

$$X(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{j\omega}) + X_{im}(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)} \quad \text{onde} \quad \theta(\omega) = \arctan\left(\frac{X_{im}(\omega)}{X_{re}(\omega)}\right)$$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- A fase da transformada é limitada por $-\pi \leq \theta(\omega) \leq +\pi$.
- Caso a fase ultrapasse o valor π , a mesma será representada como $-\pi$.
- Essa descontinuidade pode ser eliminada utilizando a “*unwrapped phase*”, ou seja, permitindo que a fase assuma qualquer valor.
- Neste caso, a fase é representada por $\theta_c(\omega)$.
- Exercício: mostre que $X_{re}(e^{j\omega n})$ é uma função par enquanto que $X_{im}(e^{j\omega n})$ é uma função ímpar.
- Exemplo: encontre a DTFT de:
 - a) $x[n] = \delta[n]$
 - b) $x[n] = \alpha^n u[n]$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- A fase da transformada é limitada por $-\pi \leq \theta(\omega) \leq +\pi$.
- Caso a fase ultrapasse o valor π , a mesma será representada como $-\pi$.
- Essa descontinuidade pode ser eliminada utilizando a “*unwrapped phase*”, ou seja, permitindo que a fase assuma qualquer valor.
- Neste caso, a fase é representada por $\theta_c(\omega)$.
- Exercício: mostre que $X_{re}(e^{j\omega n})$ é uma função par enquanto que $X_{im}(e^{j\omega n})$ é uma função ímpar.
- Exemplo: encontre a DTFT de:
 - a) $x[n] = \delta[n]$
 - b) $x[n] = \alpha^n u[n]$
- Prove que $X(e^{j\omega n})$ é periódica a cada 2π radianos.

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- As amostras de $x[n]$ podem ser obtidas a partir de $X(e^{j\omega n})$ através da IDTFT:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega$$

- Exercício: prove que a expressão acima é verdadeira.
- Condição de convergência: para que a DTFT de uma seqüência possa ser calculada, a mesma deve ser convergente, ou seja, deve possuir energia finita.
- Todas as seqüências absolutamente somáveis são convergentes.
- Nem todas as seqüências convergentes são absolutamente somáveis.
- Veja Exemplo 3.3 da página 121.

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- Algumas seqüências ilimitadas possuem TFTD.

Table 3.1: Commonly used discrete-time Fourier transform pairs.

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$\delta[n]$	1
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
$\mu[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\alpha^n \mu[n], \quad (\alpha < 1)$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- Largura de faixa de sinais discretos:
Um sinal discreto pode ser classificado como:
 - a) Sinal de banda cheia: quando seu espectro ocupa toda a banda, ou seja $0 \leq |\omega| \leq \pi$.
 - b) Sinal limitado em faixa: podem ser sub-divididos em:
 - 1) Sinais passa-baixa: são aqueles cujo espectro está limitado em $0 \leq |\omega| \leq \omega_p < \pi$, sendo ω_p a largura de faixa do sinal.
 - 2) Sinais passa-faixa: são aqueles cujo espectro está limitado em $0 < \omega_L \leq |\omega| \leq \omega_H < \pi$, onde $\omega_H - \omega_L$ é a largura de faixa do sinal.

Propriedades da TFTD

- Linearidade: se $y[n] = ax[n] + bg[n]$, então

$$Y(e^{j\omega}) = aX(e^{j\omega}) + bG(e^{j\omega})$$

Prova no quadro.

- Deslocamento temporal: se $y[n] = x[n - n_0]$, então

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Prova no quadro.

- Deslocamento na frequência: se $y[n] = e^{j\omega_0 n} x[n]$, então

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

Prova no quadro.

Propriedades da TFTD

- Derivação na frequência: se $y[n]=nx[n]$, então

$$Y(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$

Prova no quadro.

- Convolução: se $y[n]=x[n]*g[n]$, então

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega})$$

Prova: exercício proposto.

- Modulação: se $y[n]=x[n]g[n]$, então

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta}) G(e^{j\theta}) d\theta$$

Prova: exercício proposto

Propriedades da TFTD

- Propriedades das seqüências simétricas complexas.

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_{\text{cs}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\}$
$j\text{Im}\{x[n]\}$	$X_{\text{ca}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\}$
$x_{\text{cs}}[n]$	$X_{\text{re}}(e^{j\omega})$
$x_{\text{ca}}[n]$	$jX_{\text{im}}(e^{j\omega})$

- Propriedades das seqüências simétricas reais.

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X_{\text{re}}(e^{j\omega}) + jX_{\text{im}}(e^{j\omega})$
$x_{\text{ev}}[n]$	$X_{\text{re}}(e^{j\omega})$
$x_{\text{od}}[n]$	$jX_{\text{im}}(e^{j\omega})$
Symmetry relations	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
	$X_{\text{re}}(e^{j\omega}) = X_{\text{re}}(e^{-j\omega})$
	$X_{\text{im}}(e^{j\omega}) = -X_{\text{im}}(e^{-j\omega})$
	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
	$\arg\{X(e^{j\omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega})\}$

Densidade Espectral de Energia

- Teorema de Parseval ou Teorema da Conservação da Energia:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})d\omega$$

- Caso interessante: se $h[n]=g[n]$, o que estabelece o Teorema de Parseval?
- Densidade espectral de energia de uma seqüência:

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})|^2$$

- Note que

$$\mathcal{E}_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega})d\omega$$

Densidade Espectral de Energia

- Relação entre a densidade espectral de energia a a função de correlação.

$$S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{xx}(l) e^{-j\omega l}$$

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{xy}(l) e^{-j\omega l}$$

Prova no quadro.

- Exercício: encontre a função densidade espectral de energia da seguinte seqüência:

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

- Proposto: faça um programa em Matlab que compute a TFTD de uma seqüência qualquer.

Transformada Discreta de Fourier – DFT

- A DFT somente é definida para seqüências finitas.
- Uma seqüência com N pontos é completamente caracterizada por N pontos da TFTD, em freqüências ω_k , onde $0 \leq k \leq N-1$, onde ω_k são amostras igualmente espaçadas de ω .

$$X[k] = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

Sendo $W_N = \frac{2\pi}{N}$, então

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

- A transformada inversa é dada por

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

- Prova no quadro!

Transformada Discreta de Fourier – DFT

- Exemplo: encontre a DFT das seguintes seqüências:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

$$x[n] = \cos\left(2\pi r \frac{n}{N}\right) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

Transformada Discreta de Fourier – DFT

- .