

# Projeto de Detectores via Otimização Convexa para Sensoriamento Espectral em Rádios Cognitivos

Dayan A. Guimarães, Carlos F. A. C. Ribeiro e Rausley A. A. de Souza

**Resumo**—Este artigo propõe uma nova abordagem para o projeto de detectores para sensoriamento espectral no contexto de sistemas de rádios cognitivos. Detectores ótimos *minimax* são projetados através de otimização convexa e aplicados ao teste de razão de verossimilhança generalizado baseado em autovalores. Para este teste é apresentada uma comparação entre os desempenhos de detectores *minimax* e *minimax* robustos, determinísticos e aleatórios. Os detectores foram projetados por meio do aplicativo CVX, uma ferramenta baseada em Matlab para especificação e solução de problemas de otimização convexa.

**Palavras-Chave**— CVX, Detectores aleatórios, Detectores determinísticos, Detector *minimax*, Detectores robustos, Otimização convexa, Rádio cognitivo, Sensoriamento espectral por autovalores.

**Abstract**—A new convex optimization based approach to the detector design for spectrum sensing in cognitive radio systems is proposed. Optimum *minimax* detectors are designed and applied to the eigenvalue-based generalized likelihood ratio test (GLRT). The performances of deterministic and randomized *minimax* and robust *minimax* detectors are assessed for this test. The detectors were designed using CVX, a Matlab-based package for specifying and solving convex optimization problems.

**Keywords**—Convex optimization, Cognitive radio, CVX, Deterministic detector, Eigenvalue-based spectrum sensing, *Minimax* detector, Randomized detector, Robust detector.

## I. INTRODUÇÃO

A teoria da detecção de sinais e da estimação [1-3] não é recente, e embora muito dos problemas a ela relacionados já tenham sido resolvidos, trata-se de uma área em constante evolução, principalmente devido aos recentes avanços nas técnicas de processamento de sinais aleatórios [4-5] e de matrizes aleatórias [6] e ao aparecimento de novas aplicações e de novos problemas relacionados aos modernos sistemas de comunicação. Entre tais sistemas destaca-se o rádio cognitivo (RC) [7], um dos mais recentes conceitos que visa minimizar a ineficácia de uso do espectro eletromagnético nos atuais sistemas de comunicação sem fio. Entre as mais variadas tarefas que um rádio cognitivo pode desempenhar está o sensoriamento espectral. Nele, o espectro de frequências é monitorado objetivando-se encontrar lacunas onde um dado RC possa operar de forma oportunista. Entre as técnicas mais recentes de sensoriamento podem ser destacadas aquelas baseadas nos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido [8-9]. Sendo importante ao projeto de sistemas de rádio cognitivo, o sensoriamento espectral é assunto motivador de propostas de novas técnicas de projeto de detectores. Este artigo busca contribuir nesta direção.

## A. Trabalhos Relacionados e Contribuições

Técnicas de otimização matemática têm sido cada vez mais utilizadas para resolver problemas complexos em sistemas de comunicação. Entre elas destaca-se a *otimização convexa* [10], a qual vem ampliando sobremaneira suas aplicações nas áreas de processamento de sinais e telecomunicações [11]. Embora sejam conhecidas várias abordagens de projeto de detectores ótimos ou quase-ótimos e de detectores ótimos via otimização convexa [10, pp. 364-374] especificamente, os autores deste artigo, em seu melhor juízo, defendem que não há trabalhos que consideram o projeto de detectores ótimos para fins de sensoriamento espectral em sistemas de rádio cognitivo, via otimização convexa, principalmente no que tange a técnicas de sensoriamento baseadas em autovalores.

Uma das contribuições deste trabalho consiste justamente da apresentação de uma nova abordagem para o projeto de detectores ótimos *minimax* para sensoriamento espectral em rádios cognitivos, através de otimização convexa. Estes detectores são aplicados ao teste de razão de verossimilhança generalizado (GLRT, *generalized likelihood ratio test*) baseado em autovalores. Como contribuição adicional é apresentada uma comparação entre os desempenhos de detectores *minimax* e *minimax* robustos, determinísticos e aleatórios, desenvolvidos via otimização convexa por meio do aplicativo CVX, uma ferramenta baseada em Matlab para especificação e solução de problemas de otimização convexa [12]. Para os detectores *minimax* presume-se o conhecimento das distribuições das estatísticas de teste sob as hipóteses de canal ocupado e canal desocupado, enquanto para os detectores *minimax* robustos necessita-se conhecer apenas algumas médias dessas estatísticas, o que, do ponto de vista prático, representa uma vantagem em relação aos detectores *minimax*. Outra vantagem identificada nos detectores *minimax* robustos refere-se à possibilidade de serem projetados para uma relação-sinal-ruído (RSR) de pior caso e ainda funcionarem a contento em outros valores de RSR.

## B. Estrutura do Artigo

O restante deste artigo encontra-se organizado da seguinte maneira: na Seção II são abordados alguns dos principais conceitos sobre sensoriamento espectral cooperativo para rádios cognitivos, com destaque para as técnicas centralizadas baseadas em autovalores. A Seção III cobre de maneira sucinta alguns fundamentos sobre o projeto de detectores ótimos determinísticos, aleatórios e robustos via otimização, além de servir para estabelecer a notação utilizada ao longo do texto. Na seção IV é descrita a metodologia para os projetos dos detectores *minimax* para a técnica de sensoriamento sob análise e são discutidas a especificação e a solução dos problemas de

otimização convexa inerentes aos tais projetos, via CVX. Resultados de simulação são fornecidos e interpretados na Seção V. Na Seção VI são apresentados comentários conclusivos e são indicados alguns caminhos para pesquisas complementares.

## II. SENSORIAMENTO COOPERATIVO CENTRALIZADO

A escassez espectral percebida na atual política de alocação fixa representa um dos principais obstáculos ao desdobramento dos sistemas e serviços de comunicação sem fios existentes, bem como ao desenvolvimento de novos. Com o advento do conceito de rádio cognitivo [7], técnicas de acesso dinâmico ao espectro baseadas em cognição entram em cena através da ocupação das porções subutilizadas das bandas de frequência nos domínios espacial e temporal. Entre o enorme conjunto de tarefas cognitivas que um RC pode executar, o sensoriamento espectral corresponde ao teste de hipóteses que permite a detecção de lacunas de frequência licenciadas às redes primárias de comunicação sem fio para uso em caráter oportunista pelas redes secundárias de rádios cognitivos. Embora o sensoriamento possa ser executado por cada receptor secundário individualmente e de forma independente dos demais, o sensoriamento cooperativo tem sido considerado como uma possível solução de problemas experimentados por redes cognitivas na situação de sensoriamento não cooperativo, tais como a incerteza do receptor, o desvanecimento por multipercursos e o sombreamento correlacionado (*correlated shadowing*) [13]. Entre as mais variadas técnicas de sensoriamento cooperativo já propostas, aquelas baseadas em autovalores [8-9] têm recebido grande atenção da comunidade acadêmica, principalmente devido ao fato de que na formação do teste de hipóteses não é necessário nenhum conhecimento *a priori* sobre o sinal transmitido na rede primária. Em alguns esquemas, como no caso do GLRT e do ERD (*eigenvalue ratio detection*) [9], o conhecimento da variância do ruído não é necessário também.

O sensoriamento cooperativo pode ser classificado como centralizado ou distribuído, podendo ou não ser assistido por retransmissão (*relay-assisted*) [13]. No sensoriamento cooperativo centralizado, objeto deste trabalho, dados coletados por cada RC em cooperação (por exemplo, amostras de sinal recebido) são enviados a um centro de fusão (CF) por meio de um canal de controle. A este processo dá-se o nome de fusão de dados (*data-fusion*). Depois que o CF processa os dados recebidos dos RCs, decide sobre o estado de ocupação do canal sensoriado. A decisão final é informada aos RCs via canal de controle, seguindo-se o algoritmo de acesso adotado pela rede secundária.

Neste artigo considera-se o modelo de canal MIMO (*multiple input, multiple output*) discreto no tempo e sem memória, comumente adotado no sensoriamento cooperativo centralizado do tipo fusão de dados. Em uma de suas variantes admite-se que haja  $s$  antenas em um RC ou  $s$  RCs com antenas simples, cada um coletando  $n$  amostras dos sinais recebidos de  $p$  transmissores primários durante um período de sensoriamento. Tais amostras são arranjadas em uma matriz  $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{s \times n}$ . De forma análoga, as amostras referentes ao sinal transmitido pelos  $p$  transmissores primários são arranjadas em uma matriz  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{p \times n}$ . Seja  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{s \times p}$  a matriz de canal com elementos  $\{h_{ij}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  e  $j = 1, 2, \dots, p$ , os quais representam o ganho do canal entre o  $j$ -ésimo transmissor primário e o  $i$ -ésimo sensor (elemento em um arranjo de antenas ou receptor com antena simples). Finalmente, seja  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{s \times n}$  a matriz que contém as amostras de ruído térmico que

contaminam o sinal recebido pelos  $s$  sensores. A matriz de amostras do sinal recebido é então  $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V}$ .

No sensoriamento cooperativo baseado em autovalores, as lacunas espectrais são detectadas por meio de um teste de hipóteses baseado nos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido, a qual tem sua estimação de máxima verossimilhança dada pela média amostral  $\mathbf{R} = (\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\dagger)/n$ , onde  $\dagger$  significa conjugado transposto. Os autovalores  $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s\}$  de  $\mathbf{R}$  são então computados e a estatística de teste GLRT, para  $p = 1$ , é calculada através de [9]

$$Z_{\text{GLRT}} = \frac{s\lambda_1}{\text{tr}(\mathbf{R})} = \frac{s\lambda_1}{\sum_{i=1}^s \lambda_i}, \quad (1)$$

onde  $\text{tr}(\mathbf{R})$  representa o traço da matriz  $\mathbf{R}$ . O processo de sensoriamento é finalmente concluído comparando-se a estatística de teste com um *limiar de decisão* definido de acordo com o desempenho almejado.

Escolheu-se o GLRT apenas por este ser um teste cego (que não demanda conhecimento sobre o sinal transmitido e sobre a variância do ruído). Não se preocupou, portanto, com o quão ótimo é este teste em comparação a outros.

O problema de otimização a que se refere o artigo corresponde à forma com que a variável de decisão é processada para que se decida sobre a ocupação do canal.

## III. PROJETO DE DETECTORES VIA OTIMIZAÇÃO

Seja  $Z$  uma variável aleatória com valores em  $\{1, 2, \dots, q\}$ , por exemplo. Admita que a distribuição de  $Z$  depende do parâmetro  $\theta$  com valores em  $\{1, 2, \dots, h\}$ , por exemplo. Cada valor de  $\theta$  pode estar associado a uma hipótese e o que se objetiva é: i) afirmar a ocorrência de uma ou negar a ocorrência das demais, ou ii) ordenar as hipóteses de forma a saber se os correspondentes parâmetros foram superestimados ou subestimados. Como exemplo do primeiro caso pode-se ter  $q$  valores de  $Z$  representando possíveis valores das amostras do sinal recebido no processo de sensoriamento espectral. Neste caso ter-se-ia  $h = 2$ , com  $\theta = 1 \equiv \mathcal{H}_0$  representando a hipótese de ausência de sinal primário e  $\theta = 2 \equiv \mathcal{H}_1$  representando a hipótese de presença de sinal primário. Tem-se aqui um *teste de hipótese binário*, que também pode ser chamado de *detecção*, já que o objetivo é detectar a presença ou a ausência de um sinal. Em outras palavras, as amostras de  $Z$  foram geradas sob uma das duas hipóteses; o que se deseja é saber qual delas. Como exemplo do segundo caso suponha que cada um dos  $h$  valores de  $\theta$  seja um vetor cujos elementos são a média e a variância de  $Z$  sob as  $h$  diferentes hipóteses. Aqui a norma da diferença entre o parâmetro real e o parâmetro estimado tem um significado de erro de estimação da média e da variância da variável  $Z$  sob cada par de hipóteses em análise.

Nas subseções seguintes será considerado apenas o teste de hipóteses binário, pois este corresponde ao problema de sensoriamento espectral. Casos genéricos e outros detalhes aqui omitidos podem ser encontrados em [10, pp. 364-374].

### A. Detectores Determinísticos e Aleatórios

As distribuições da variável aleatória  $Z$  sob as hipóteses  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$  podem ser representadas por uma matriz  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{q \times 2}$ , com cada elemento  $p_{kj} = \Pr(Z = k | \theta = j)$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ ;  $j = 1, 2$ . Um detector binário determinístico é aquele que opera sob uma função  $\psi$  que mapeia o conjunto  $\{1, 2, \dots, q\}$  de valores observados no conjunto  $\{1, 2\}$  de hipóteses. Como exemplo, o detector de máxima verossimilhança pode ser modelado como  $\theta_{\text{mv}} = \psi_{\text{mv}}(k) = \arg \max_j p_{kj}$ . Neste detector, dada a observação de  $Z = k$ , o estimador de máxima verossimilhança

de  $\theta$  é aquele que maximiza a probabilidade de se observar o valor  $k$  no conjunto de possíveis distribuições (ou hipóteses).

Seja a matriz  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{2 \times q}$ , a qual governa a operação do detector, formada pelos elementos  $t_{jk} = \Pr(\theta = j \mid Z = k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, q$ ;  $j = 1, 2$ . As restrições naturais para  $\mathbf{T}$  são: cada coluna de  $\mathbf{T}$  deve ter elementos maiores ou iguais a zero; a soma dos elementos em uma coluna deve ser unitária, ou seja,  $\mathbf{t}_k \succeq 0$ ,  $\mathbf{1}^T \mathbf{t}_k = 1$ , onde  $\mathbf{t}_k$  é o vetor correspondente à  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{1}$  é o vetor com todos os elementos unitários e o sinal  $\succeq$  significa desigualdade vetorial elemento a elemento. Diz-se então que, dada a observação de  $Z = k$ , o detector aleatório fornecerá  $\theta = j$  com probabilidade  $t_{jk}$ . Note que se todas as colunas de  $\mathbf{T}$  tiverem norma unitária (o que significa que um dos elementos deve ser igual a 1) ter-se-á um mapeamento determinístico do valor observado  $Z = k$  no parâmetro estimado  $\theta = j$ . Nota-se, então, que o detector aleatório é uma generalização do detector determinístico.

Para que se entenda melhor a afirmação de que a matriz  $\mathbf{T}$  governa a operação do detector, considere as matrizes  $\mathbf{T}^{(1)}$  e  $\mathbf{T}^{(2)}$  a seguir, referentes a um detector aleatório e a outro determinístico, respectivamente, para  $k = 1, \dots, 4$  indexando as colunas de  $\mathbf{T}^{(1)}$  e  $\mathbf{T}^{(2)}$  e  $j = 1, 2$  indexando as linhas:

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alimentando o detector aleatório com o valor de  $Z = k = 2$  tem-se como decisão a hipótese  $\theta = 1$ . Alimentando-o com os valores de  $Z = k = 3$  ou  $k = 4$ , tem-se como decisão a hipótese  $\theta = 2$ . No entanto, alimentando-o com o valor de  $Z = k = 1$  tem-se como decisão a hipótese  $\theta = 1$  com probabilidade 0.7 ou a hipótese  $\theta = 2$  com probabilidade 0.3, ou seja, o próprio detector torna a sua decisão aleatória. Alimentando o detector determinístico com os valores de  $Z = k = 1$  ou  $k = 2$ , tem-se como decisão a hipótese  $\theta = 1$ . Alimentando-o com os valores de  $Z = k = 3$  ou  $k = 4$ , tem-se como decisão a hipótese  $\theta = 2$ .

Percebe-se então que, do ponto de vista do projeto de um detector ótimo, o que se objetiva é a determinação da matriz  $\mathbf{T}$ , que será então a variável do correspondente problema de otimização. Os dados de entrada serão a matriz  $\mathbf{P}$ , as restrições inerentes à definição da matriz  $\mathbf{T}$  e as restrições quanto ao desempenho alvo do processo de detecção, estas dadas pela matriz de probabilidades de detecção  $\mathbf{D} = \mathbf{TP}$ , com elementos  $D_{ij} = (\mathbf{TP})_{ij} = \Pr(\hat{\theta} = i \mid \theta = j)$ , ou seja,  $D_{ij}$  é a probabilidade de se decidir pela hipótese  $i$  quando da ocorrência da hipótese  $j$ . Para o caso do sensoriamento espectral tem-se que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P_{fa} & 1 - P_d \\ P_{fa} & P_d \end{bmatrix},$$

onde  $P_{fa}$  é a probabilidade de falso alarme, a qual representa a probabilidade de se inferir que um canal sensoriado está ocupado, sendo que de fato não está;  $P_d$  é a probabilidade de detecção e representa a probabilidade de se inferir que o canal está ocupado, de fato estando ocupado. Do exposto conclui-se que é desejável que o processo de sensoriamento espectral busque minimizar a  $P_{fa}$  e maximizar a  $P_d$ , objetivos que são conflitantes – um baixo valor do limiar de decisão resultará em alta  $P_{fa}$  e alta  $P_d$  e vice versa. Isto sugere que uma solução de compromisso seja adotada, o que na prática é feito com o auxílio de curvas ROC (*receiver operating characteristic*), as quais mostram a variação de  $P_{fa}$  versus  $P_d$  com a variação do limiar de decisão.

## B. Detector Minimax

Vários critérios de otimização do detector podem ser adotados em seu projeto, sendo os mais comuns os critérios *minimax*, *Bayes*, *MAP* (máximo a posteriori) e *MV* (máxima verossimilhança) [10]. Considera-se aqui o detector *minimax*, que para o caso do sensoriamento espectral pode ser descrito pelo problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \max_j (P_{fa}, 1 - P_d) \\ & \text{sujeito a } \mathbf{t}_k \succeq 0, \mathbf{1}^T \mathbf{t}_k = 1, \quad k = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (2)$$

Embora o problema (2) possa ser resolvido diretamente, também pode ser considerado como um problema de otimização bi-critério a ser resolvido por *escalarização* [10, p. 368]. Neste método busca-se minimizar a soma ponderada de  $P_{fa}$  e  $1 - P_d$ , o que, para diferentes ponderações, resultará em uma curva ROC do tipo linear por partes (*piecewise linear*) cujos vértices correspondem a detectores determinísticos [10, p. 372]. Como isto não leva a todos os possíveis detectores ótimos (não inclui aqueles fora dos vértices da curva ROC), é possível que a solução direta de (2) leve a projetos de detectores aleatórios que superem o desempenho de detectores determinísticos. Daí a importância de também considerar detectores não determinísticos neste trabalho. Vale ainda citar que, sem restrições adicionais, a solução direta do problema (2) proporcionará  $P_{fa} = 1 - P_d$ , característica intrínseca ao critério minimax.

## C. Detector Minimax Robusto

No caso do detector *minimax* apresentado anteriormente admite-se conhecer a matriz  $\mathbf{P}$ . Nesta subseção considera-se que apenas alguma informação *a priori* sobre ela seja conhecida. Como exemplo, suponha que sejam dados o primeiro e o segundo momento da variável observada sob as hipóteses existentes.  $\mathbf{P}$  agora pode pertencer a um conjunto finito ou infinito de distribuições,  $\mathcal{P}$ . Assim, tanto a matriz  $\mathbf{T}$  que caracteriza o detector quanto a matriz  $\mathbf{D}$  de probabilidades de detecção dependerão do valor particular de  $\mathbf{P}$ . O desempenho do detector será então julgado em termos de uma matriz de probabilidades de detecção de pior caso, cujos elementos serão:

$$D_{ij}^{\text{pc}} = \begin{cases} \max_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} D_{ij}, & i, j = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq j \\ \min_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} D_{ij}, & i, j = 1, 2, \dots, m, \quad i = j. \end{cases}$$

A probabilidade de erro de pior caso, que é a maior probabilidade de erro, quando a hipótese  $\theta = i$ , para as distribuições em  $\mathcal{P}$ , é então  $P_i^{\text{epc}} = 1 - D_{ii}^{\text{pc}}$ . O detector *minimax* robusto pode então ser descrito pelo problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \max_i P_i^{\text{epc}} = \max_{i=1, \dots, m} \max_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} [1 - (\mathbf{TP})_{ii}] \\ & = 1 - \min_{i=1, \dots, m} \min_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} (\mathbf{TP})_{ii} \\ & \text{sujeito a } \mathbf{t}_k \succeq 0, \mathbf{1}^T \mathbf{t}_k = 1, \quad k = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (3)$$

Para o caso em que  $\mathcal{P}$  é infinito e é definido a partir de um conjunto de restrições lineares de igualdades e desigualdades, formando um poliedro, tem-se uma formulação bastante complexa de (3). Usando os argumentos de [10, p. 373], admite-se aqui que sejam conhecidos alguns valores esperados para cada distribuição da variável sob análise (referente a cada hipótese). Então, sendo  $\mathbf{p}_k$  a  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{P}$ , ( $k = 1, 2$  para o detector binário) o conhecimento de tais valores esperados

pode ser representado por  $\mathbf{A}_k \mathbf{p}_k = \mathbf{b}_k$ , onde  $\mathbf{A}_k$  é a matriz que determina que valor esperado é conhecido sob cada hipótese. Como exemplo, no caso do sensoriamento espectral considere que o primeiro e o segundo momento da variável de decisão (1) sob as hipóteses  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$  sejam conhecidos e valham  $E(Z) = \alpha_1$  e  $E(Z^2) = \alpha_2$  sob a hipótese  $\mathcal{H}_0$ ;  $E(Z) = \beta_1$  e  $E(Z^2) = \beta_2$  sob  $\mathcal{H}_1$ . As matrizes  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$  e os vetores  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  serão:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_q \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_q^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix},$$

onde  $\{a_1, \dots, a_q\}$  são os possíveis valores da variável aleatória observada  $Z$ . Omitindo demais detalhes de formulação, o detector *minimax* robusto para o caso binário agora pode ser projetado a partir da solução do problema de otimização linear (e, portanto, convexo):

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \gamma \\ & \text{sujeito a } \begin{cases} z_0 + z_1 \alpha_1 + z_2 \alpha_2 \geq \gamma \\ w_0 + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \geq \gamma \\ z_0 + z_1 a_i + z_2 a_i^2 \leq t_i, \quad i = 1, \dots, q \\ w_0 + w_1 a_i + w_2 a_i^2 \leq 1 - t_i, \quad i = 1, \dots, q \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{1}, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $\mathbf{t}$  é a primeira linha transposta da matriz  $\mathbf{T}$ . A segunda linha de  $\mathbf{T}$  é dada por  $(\mathbf{1} - \mathbf{t})^T$ . As variáveis do problema são  $z_0, z_1, z_2, w_0, w_1, w_2$  e  $\mathbf{t}$ . De posse de  $\mathbf{T}$  o detector realizará o teste de hipóteses utilizando procedimento análogo ao que está descrito na Seção III-B. Como entrada ter-se-á uma amostra da variável  $Z$ , que no caso corresponde ao valor da variável de decisão computada via (1), quantizada em um dos  $q$  possíveis valores  $\{a_1, \dots, a_q\}$ .

#### IV. PROJETO DOS DETECTORES VIA CVX

O problema de otimização (2) traduzido para o ambiente do CVX é apresentado no Programa 1. O único dado de entrada é a matriz  $\mathbf{P}$ . Aqui admite-se que não se conhece *a priori* as densidades de probabilidade exatas das variáveis de decisão sob as hipóteses  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$ . O que se sugere é que tais densidades sejam estimadas empiricamente para formar a matriz  $\mathbf{P}$ . Para este trabalho  $\mathbf{P}$  foi estimada via Mathcad, num programa à parte, como segue: 10.000 valores da variável de decisão obtida de acordo com (1) foram quantizados em  $q$  valores e ajustados para a faixa de inteiros  $[0, q-1]$ . Em seguida foram construídos dois histogramas da variável quantizada sob as duas hipóteses, normalizados para a soma unitária das probabilidades de cada valor. Tais histogramas alimentaram a primeira e a segunda colunas de  $\mathbf{P}$  no arquivo “P.dat”, correspondendo às hipóteses  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$ , respectivamente. A solução de interesse no problema de otimização é a matriz  $\mathbf{T}$ , que no Programa 1 pode ser arredondada de forma que passe a ter somente os valores 0 e 1. Esta heurística foi adotada para transformar o detector aleatório, que eventualmente resulte, em um detector determinístico. No caso do detector *minimax*, tal heurística não levou a variações de desempenho.

O problema de otimização (4) traduzido para o ambiente do CVX é apresentado no Programa 2. As matrizes  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$  e os vetores  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  são os dados de entrada, sendo que os elementos de  $\mathbf{b}_1$  e  $\mathbf{b}_2$  foram estimados a partir dos histogramas normalizados da variável de decisão, como já explicado. Neste caso também foi adotada a heurística para transformar o detector aleatório robusto em um detector determinístico.

Entretanto, diferentemente do detector *minimax* do Programa 1, aqui tal heurística produziu melhoria de desempenho.

#### Programa 1 – Código CVX para o projeto do detector *minimax*

```
P=dlmread('c:\P.dat');
[q,m] = size(P); % m = 2 para detector binário
cvx_begin
variables T(m,q) D(m,m)
minimize max(D(1,2), D(2,1))
subject to
D == T*P;
sum(T, 1) == 1;
T >= 0;
cvx_end
T = round(T); % heurística opcional
```

#### Programa 2 – Código CVX para o projeto do detector *minimax* robusto

```
alpha1=dlmread('c:\alpha1.dat');
alpha2=dlmread('c:\alpha2.dat');
beta1=dlmread('c:\beta1.dat');
beta2=dlmread('c:\beta2.dat');
q=dlmread('c:\q.dat');
a = 0:q-1;
cvx_begin
variables t(q) z0 z1 z2 w0 w1 w2 g
maximize g
subject to
z0 + z1*alpha1 + z2*alpha2 >= g;
w0 + w1*beta1 + w2*beta2 >= g;
t >= 0;
t <= 1;
for i=1:q
z0 + z1*a(i) + z2*(a(i)^2) <= t(i);
w0 + w1*a(i) + w2*(a(i)^2) <= (1-t(i));
end
cvx_end
T = [t,1-t]';
T = round(T); % heurística opcional
```

## V. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Resultados de simulação envolvendo detectores *minimax* e *minimax* robustos, determinísticos e aleatórios são apresentados e interpretados nesta seção. O desempenho dos detectores foi avaliado de três maneiras: i) utilizando as correspondentes matrizes  $\mathbf{T}$ , como descrito na Seção III-A; ii) por meio de curvas ROC convencionais e iii) por meio de curvas ROC construídas heurísticamente. A forma convencional da ROC mostra a variação de  $P_{fa}$  versus  $P_d$  em função da variação do limiar de decisão, usando a estatística de teste (1). A forma heurística proposta neste artigo cria uma matriz  $\mathbf{T}'$  anexando à esquerda de  $\mathbf{T}$  uma matriz de mesmas dimensões de  $\mathbf{T}$ , com somente uns na primeira linha e zeros na segunda. À direita de  $\mathbf{T}$  é anexada outra matriz de mesmas dimensões, com somente zeros na primeira linha e uns na segunda. Simula-se a variação do limiar de decisão através do uso de matrizes  $\mathbf{T}$  que são submatrizes de  $\mathbf{T}'$  obtidas por sucessivos janelamentos de  $q$  colunas, da esquerda para a direita. Quando a submatriz mais à esquerda é adotada o detector decidirá sempre pela hipótese  $\mathcal{H}_0$ , gerando o ponto  $P_{fa} = P_d = 0$  da ROC. Com a submatriz mais à direita o detector decidirá sempre pela hipótese  $\mathcal{H}_1$ , gerando o ponto  $P_{fa} = P_d = 1$ . Os demais pontos da ROC são obtidos com as submatrizes  $\mathbf{T}$  correspondentes aos demais janelamentos.

A Figura 1 mostra ROCs convencionais (C) e ROCs para detectores *minimax* e *minimax* robustos sem heurística de arredondamento da matriz  $\mathbf{T}$  (identificados por M e MR, respectivamente) e com arredondamento (MH, MRH), para diferentes números de níveis de quantização da variável de decisão. Os pontos isolados correspondem a pontos de operação resultantes do uso da matriz  $\mathbf{T}$  ótima, obtida por meio dos Programas 1 e 2. Nota-se que, como esperado, o detector *minimax* sem arredondamento tende a produzir  $P_{fa} = 1 - P_d$ , com maior proximidade deste valor conforme o número de níveis de quantização aumenta. Com arredondamento dos

valores de  $\mathbf{T}$  o desempenho do *minimax* se manteve aproximadamente o mesmo, enquanto que para o *minimax* robusto percebeu-se uma significativa melhoria. Este é um resultado bastante interessante, significando que o conhecimento das distribuições da estatística de teste sob as duas hipóteses, no caso do *minimax*, produz efeito similar ao conhecimento apenas da sua média e de seu segundo momento sob as duas hipóteses, no caso do detector *minimax* robusto. Deste ponto em diante, portanto, considerou-se que a matriz  $\mathbf{T}$  de saída dos Programas 1 e 2 foi arredondada segundo a heurística aqui proposta.

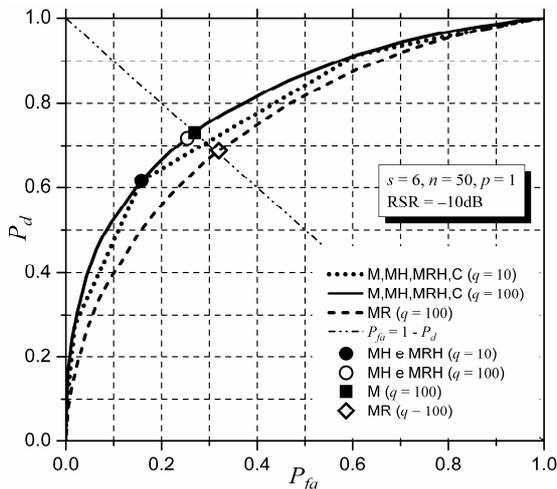


Fig. 1. ROCs para convencionais (C) e para detectores *minimax* e *minimax* robustos sem heurística de arredondamento (M, MR) ou com heurística (MH, MRH), com diferentes números de níveis de quantização  $q$ .

A Figura 2 mostra ROCs para os mesmos detectores considerados na Figura 1, com  $q = 100$ , porém para diferentes valores de RSR de projeto e de operação. Na Figura 2 o par (-15/-10), por exemplo, significa que os detectores *minimax* e *minimax* robustos foram projetados para operar com RSR = -15 dB, tendo sido testados operando a -10 dB.

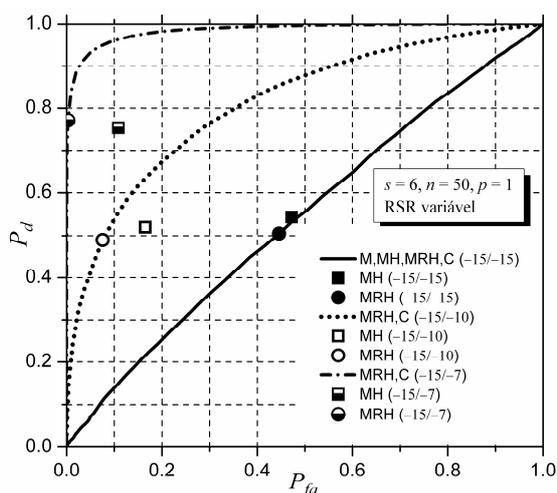


Fig. 2. ROCs para detectores convencionais (C) e para detectores *minimax* e *minimax* robustos sem heurística de arredondamento (M, MR) ou com heurística (MH, MRH), sob diferentes RSRs de projeto e de operação, em dB.

Pelos resultados da Figura 2 conclui-se que é possível fazer com que os detectores projetados para uma RSR mais baixa operem com valores de RSR mais altos, com uma esperada degradação de desempenho que é menor para os detectores *minimax* robustos. Projetando-se os detectores para RSR = -20 dB a diferença de desempenho em favor do detector *minimax* robusto é ainda maior. Esta é outra vantagem dos detectores

*minimax* robustos que, além de não demandarem o conhecimento *a priori* das distribuições da estatística de teste, são relativamente robustos às variações RSR do canal. Vale lembrar que, para que detectores convencionais funcionem corretamente com a alteração da RSR há que se recalculer um novo limiar de decisão que produza os valores de  $P_{fa}$  e  $P_d$  de interesse, tendo-se *a priori* o conhecimento da densidade de probabilidade da estatística de teste. Foram também efetuados projeto sob RSRs mais altas e operação em RSRs mais baixas, o que não produziu comportamentos tão interessantes quanto aqueles mostrados na Figura 2. Por esta razão os correspondentes resultados não foram inseridos no artigo.

## VI. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste artigo foi proposta uma nova abordagem para o projeto de detectores *minimax* para sensoriamento espectral, via otimização convexa. Os detectores foram aplicados à técnica GLRT baseada em autovalores. A comparação entre os desempenhos de detectores *minimax* e *minimax* robustos revelou ser adequado o uso da heurística de arredondamento da matriz que governa a operação do detector, transformando-o de um eventual detector aleatório em um detector determinístico. Concluiu-se também que detectores *minimax* robustos, além de não demandarem o conhecimento *a priori* das distribuições da estatística de teste sob as duas hipóteses, são relativamente robustos às variações de RSR do canal, podendo ser projetados para RSRs mais baixas e operar satisfatoriamente em RSRs mais altas sem nenhum tipo de reconfiguração.

Um caminho natural para continuidade das pesquisas seria adequar o projeto dos detectores ao cenário de ruído impulsivo. Esta oportunidade de investigação aponta naturalmente para os detectores robustos, os quais podem ser inerentemente menos sensíveis aos efeitos deste tipo de ruído.

## REFERÊNCIAS

- [1] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. 2nd Ed. New York, USA: Springer-Verlag (a Dowden & Culver book), 1994.
- [2] R. N. McDonough and A. D Whalen, *Detection of Signals in Noise*. 2nd Ed. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1995.
- [3] H. L. Van-Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory*. Parts I-IV. New York, USA: Wiley Interscience, 2001-2002.
- [4] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. Vol. I: Estimation Theory. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1993.
- [5] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing*. Vol. II: Detection Theory. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1998.
- [6] R. Couillet and M. Debbah, *Random Matrix Methods for Wireless Communications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011.
- [7] J. Mitola, and G. Q. Maguire, "Cognitive Radio: Making Software Radios More Personal", *IEEE Personal Comm.*, vol. 6, no. 4, pp. 13-18, 1999.
- [8] A. Kortun, et al., "On the Performance of Eigenvalue-Based Cooperative Spectrum Sensing for Cognitive Radio", *IEEE J. of Selected Topics In Signal Processing*, vol. 5, no. 1, February 2011.
- [9] B. Nadler, F. Penna, and R. Garello, "Performance of Eigenvalue-based Signal Detectors with Known and Unknown Noise Level", In: *Proc. of the IEEE ICC*, Kyoto, Japan, June 2011.
- [10] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, New York, USA: Cambridge University Press, 2010.
- [11] D. P. Palomar and Y. C. Eldar (Eds.), *Convex Optimization in Signal Processing and Communications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010.
- [12] M. Grant and S. Boyd. *CVX: Matlab software for disciplined convex programming*, version 1.22. Disponível: <http://cvxr.com/cvx/download/>, Feb. 2012.
- [13] I. F. Akyildiz, B. F. Lo, and R. Balakrishnan, "Cooperative Spectrum Sensing in Cognitive Radio Networks: A Survey", *Elsevier Physical Comm.* 4, pp. 40-62, 2010.